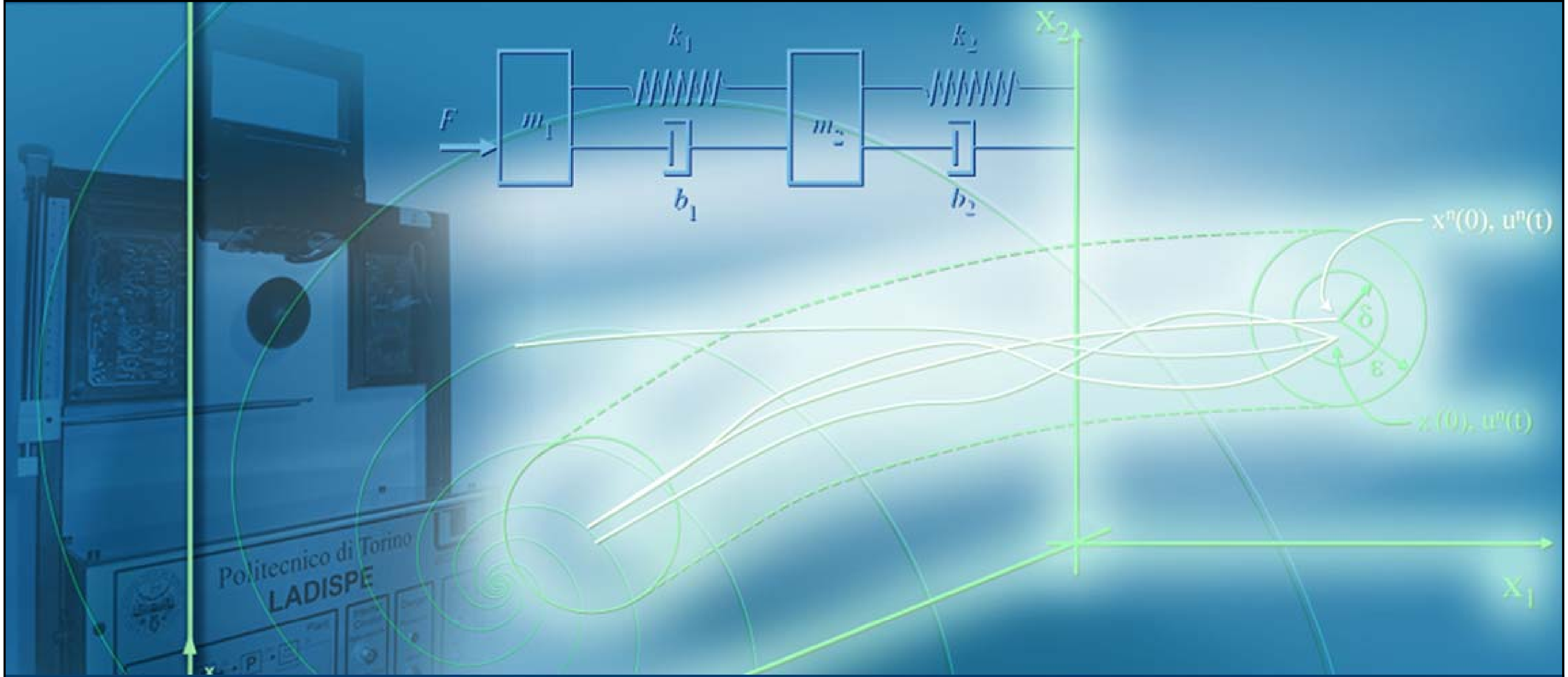
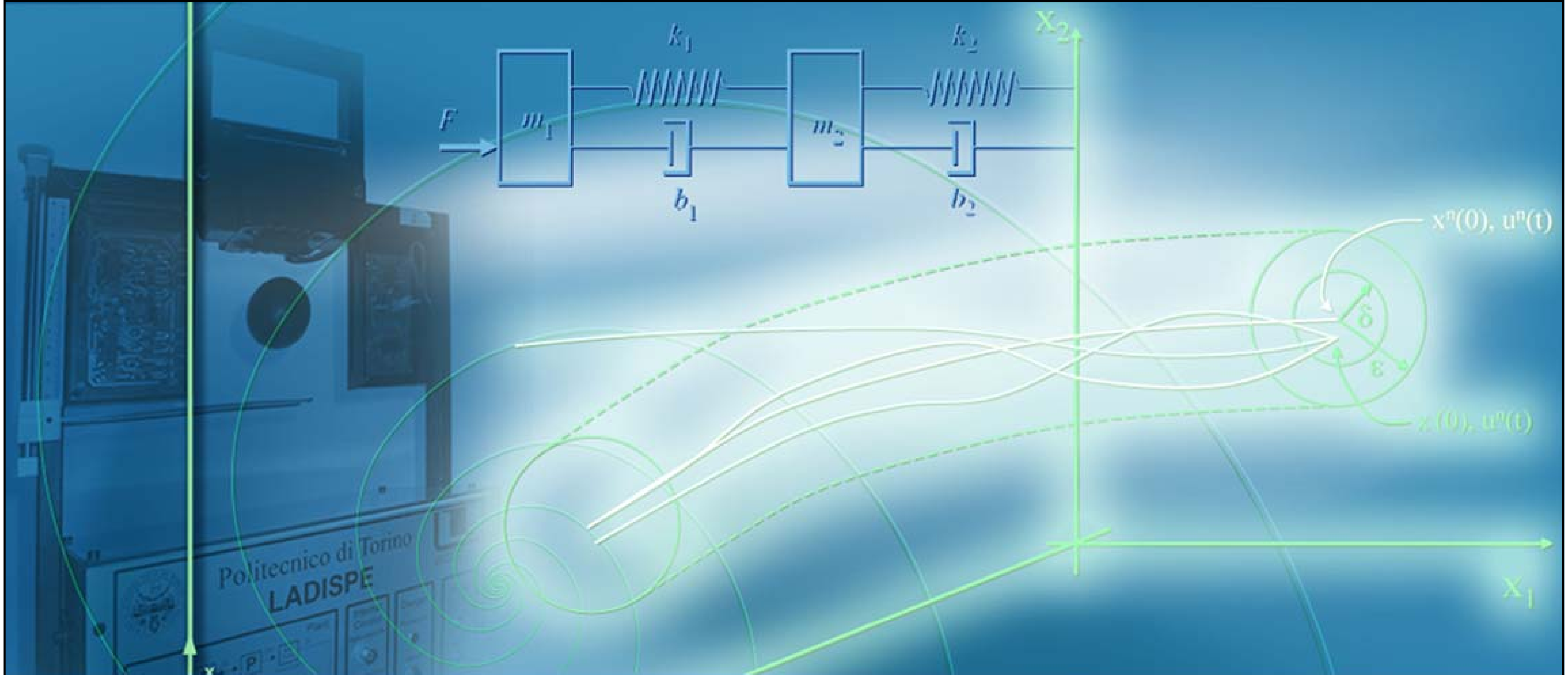


Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

Esempi di soluzione per sistemi dinamici LTI TC

Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

- Scomposizione in fratti semplici (parte I)
- Esempio di soluzione 1
- Scomposizione in fratti semplici (parte II)
- Esempio di soluzione 2
- Scomposizione in fratti semplici (parte III)
- Esempio di soluzione 3
- Considerazioni finali



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Scomposizione in fratti semplici (parte I)

Scomposizione in fratti semplici: introduzione

- Sia $F(s)$ una funzione razionale fratta rappresentata nella forma polinomiale

$$\boxed{F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}}$$

- Supponiamo che:
  - $N_F(s)$ e $D_F(s)$ siano polinomi in s, di grado m ed n rispettivamente ($m < n \rightarrow F(s)$ strettamente propria)
  - $N_F(s)$ e $D_F(s)$ non abbiano radici in comune
  - Il denominatore di $F(s)$ abbia n **radici distinte** $p_1, \ldots, p_n$, (con molteplicità unitaria)

Scomposizione in fratti semplici: definizione

- Si può fattorizzare il denominatore di $F(s)$ mettendo in evidenza le n radici distinte:

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

- La **scomposizione i fratti semplici** (detta anche sviluppo di Heaviside) di $F(s)$ è definita da:

$$F(s)=\frac{R_1}{s-p_1}+\frac{R_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{R_n}{s-p_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i}{s-p_i}$$

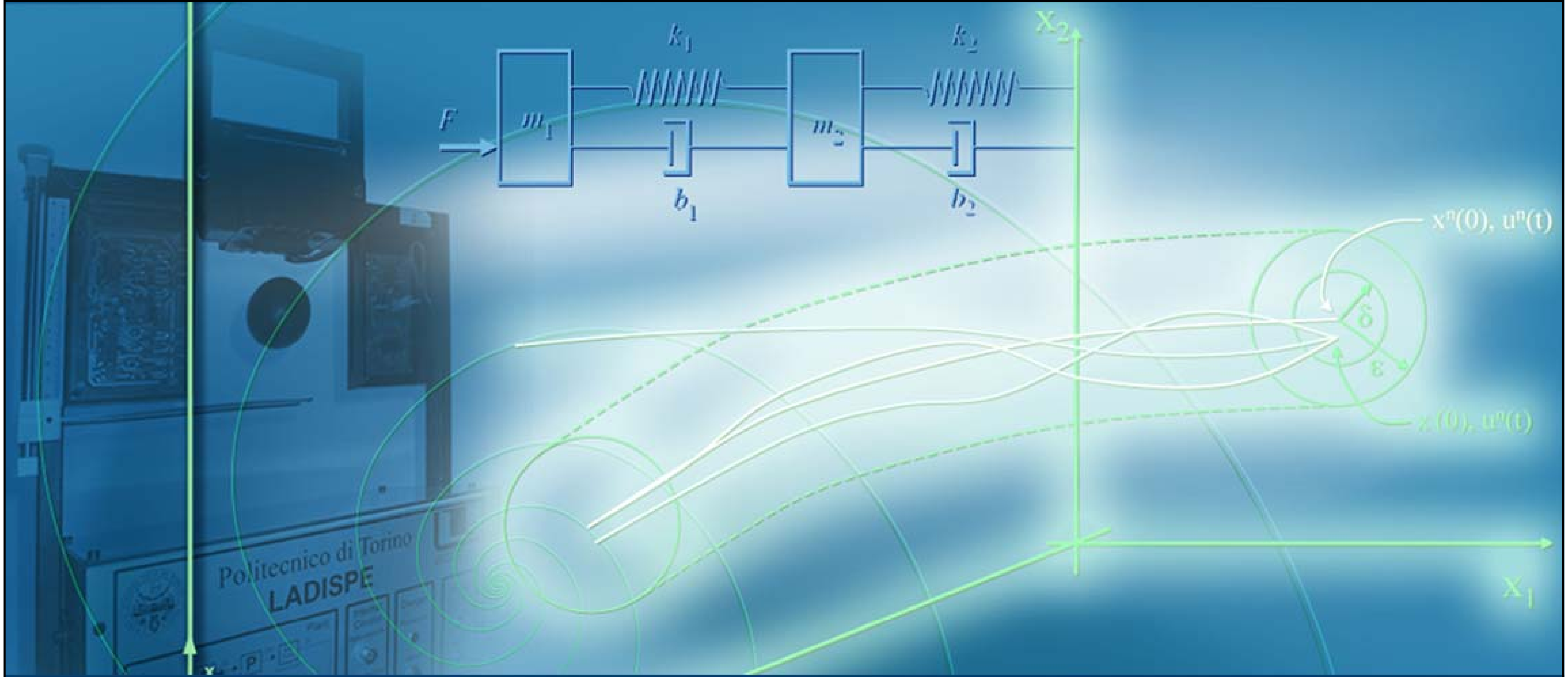
Scomposizione in fratti semplici: residui

- Nella scomposizione in fratti semplici:

$$F(s) = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{R_n}{s-p_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s-p_i}$$

- I termini R_1, … , R_n sono detti **residui**
- Nel caso considerato (radici distinte), i residui vengono calcolati come:

$$R_i = \lim_{s \to p_i} (s-p_i) F(s), \; i = 1, \ldots, n$$



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Esempio di soluzione 1

Formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- Determinare l'espressione analitica del movimento dello stato $x(t)$ nel caso in cui
  - L'ingresso sia un gradino di ampiezza2 ($u(t) = 2\varepsilon(t)$)
  - Le condizioni iniziali siano: $x(0) = [2 \;\; 2]^T$

Procedimento di soluzione

- I passi da seguire sono:
  - Calcolo della soluzione $X(s)$ nel dominio della trasformata di Laplace
  - Calcolo della scomposizione in fratti semplici (e dei corrispondenti residui) di $X(s)$
  - Calcolo di $x(t)$ tramite antitrasformazione della scomposizione in fratti semplici di $X(s)$

Impostazione dei calcoli in dom(s) (1/2)

- Soluzione nel dominio della trasformata di Laplace:

$$X(s) = \underbrace{\left(sI - A\right)^{-1} x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{\left(sI - A\right)^{-1} BU(s)}_{X_f(s)}$$

- Con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, U(s) = \frac{2}{s}$$

Impostazione dei calcoli in dom(s) (2/2)

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}\, x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - A)^{-1}\, BU(s)}_{X_f(s)}$$

- Per calcolare $X(s)$ procediamo con i seguenti passi:
  - Calcolo del termine $(sI - A)^{-1}$
  - Calcolo del movimento libero $X_\ell(s)$
  - Calcolo del movimento forzato $X_f(s)$
  - Calcolo di $X(s)$ come $X(s) = X_\ell(s) + X_f(s)$
  - Scomposizione i fratti semplici di $X(s)$

Calcolo di $(sI - A)^{-1}$

- Ricordiamo che: $(sI-A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(sI-A)} Adj(sI-A)$

$$(sI-A)^{-1} = \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\underbrace{s^2+3s+2}_{\det(sI-A)}} \underbrace{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}_{Adj(sI-A)} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Calcolo di $X_\ell(s)$

$$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1} x(0) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{x(0)} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2s+8}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{2s-4}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Calcolo di $X_f(s)$

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} U(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \frac{2}{s} = \begin{bmatrix} \dfrac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-4}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Calcolo di $X(s)$

- $X(s)$ viene calcolato come somma di $X_\ell(s)$ e $X_f(s)$

$$X(s) = X_\ell(s) + X_f(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{2s+8}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{2s-4}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}}_{X_\ell(s)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-4}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}}_{X_f(s)} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2s^2+10s+6}{s(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{2s^2-4s-4}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Scomposizione in fratti semplici di $X(s)$

$$X(s)=\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{2s^2+10s+6}{s(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{2s^2-4s-4}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{R_1^{(1)}}{s}+\dfrac{R_2^{(1)}}{s+1}+\dfrac{R_3^{(1)}}{s+2} \\ \dfrac{R_1^{(2)}}{s}+\dfrac{R_2^{(2)}}{s+1}+\dfrac{R_3^{(2)}}{s+2} \end{bmatrix}$$

Calcolo dei residui per $X_1(s)$

$$X_1(s) = \frac{2s^2+10s+6}{s(s+1)(s+2)} = \frac{R_1^{(1)}}{s} + \frac{R_2^{(1)}}{s+1} + \frac{R_3^{(1)}}{s+2}$$

$$R_1^{(1)} = \lim_{s\to 0} sX_1(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{2s^2+10s+6}{\cancel{s}(s+1)(s+2)} = 3$$

$$R_2^{(1)} = \lim_{s\to -1}(s+1)X_1(s) = \lim_{s\to -1}\cancel{(s+1)}\frac{2s^2+10s+6}{s\cancel{(s+1)}(s+2)} = 2$$

$$R_3^{(1)} = \lim_{s\to -2}(s+2)X_1(s) = \lim_{s\to -2}\cancel{(s+2)}\frac{2s^2+10s+6}{s(s+1)\cancel{(s+2)}} = -3$$

$$\to X_1(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

Calcolo dei residui per $X_2(s)$

$$X_2(s) = \frac{2s^2 - 4s - 4}{s(s+1)(s+2)} = \frac{R_1^{(2)}}{s} + \frac{R_2^{(2)}}{s+1} + \frac{R_3^{(2)}}{s+2}$$

$$R_1^{(2)} = \lim_{s \to 0} sX_2(s) = \lim_{s \to 0} s\,\frac{2s^2 - 4s - 4}{s(s+1)(s+2)} = -2$$

$$R_2^{(2)} = \lim_{s \to -1} (s+1)X_2(s) = \lim_{s \to -1} (s+1)\frac{2s^2 - 4s - 4}{s(s+1)(s+2)} = -2$$

$$R_3^{(2)} = \lim_{s \to -2} (s+2)X_2(s) = \lim_{s \to -2} (s+2)\frac{2s^2 - 4s - 4}{s(s+1)(s+2)} = 6$$

$$\rightarrow X_2(s) = -\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{6}{s+2}$$

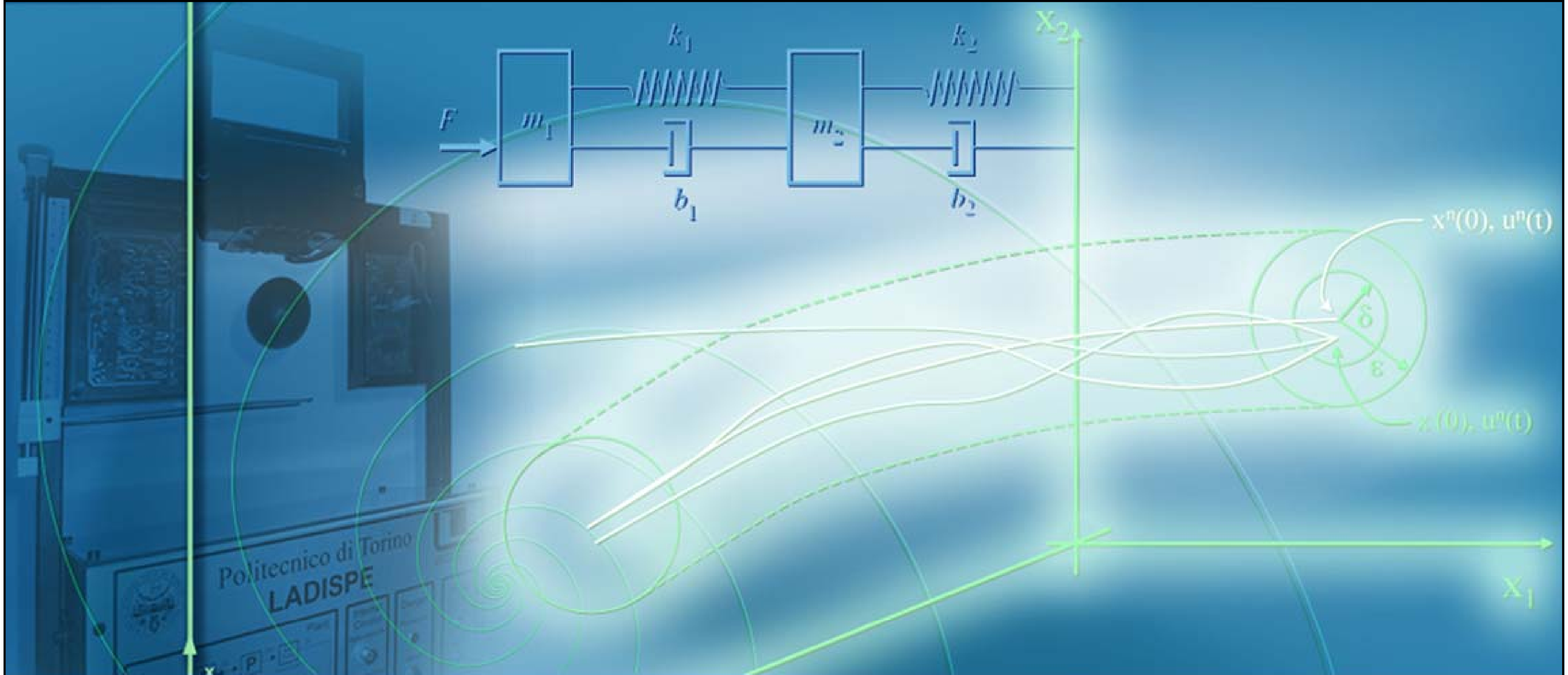
Risultato

- Pertanto:

$$X(s)=\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{s}+\frac{2}{s+1}-\frac{3}{s+2}\\-\frac{2}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{6}{s+2}\end{bmatrix}$$

- Si può procedere con l'antitrasformazione ricordando che: $Re^{at}\varepsilon(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R}{s-a}\right\}$

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+2e^{-t}-3e^{-2t}\\-2-2e^{-t}+6e^{-2t}\end{bmatrix}\varepsilon(t)$$



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Scomposizione in fratti semplici (parte II)

Scomposizione in fratti semplici con radici $\mathbb{C}$

- Quando nel denominatore di $F(s)$ sono presenti coppie distinte di radici complesse coniugate del tipo:
  - $p_1 = \sigma_0 + j\omega_0$, $p_2 = p_1^* = \sigma_0 - j\,\omega_0$

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{\underbrace{(s-\sigma_0 - j\omega_0)}_{(s-p_1)}\underbrace{(s-\sigma_0 + j\omega_0)}_{(s-p_2)}(s-p_3)\cdots(s-p_n)}$$

- Il procedimento della scomposizione in fratti semplici rimane invariato:

$$F(s) = \frac{R_1}{\underbrace{s-\sigma_0 - j\omega_0}_{s-p_1}} + \frac{R_2}{\underbrace{s-\sigma_0 + j\omega_0}_{s-p_2}} + \frac{R_3}{s-p_3}\cdots + \frac{R_n}{s-p_n}$$

Calcolo dei residui con radici $\mathbb{C}$

$$F(s) = \frac{R_1}{s-\sigma_0-j\omega_0} + \frac{R_2}{s-\sigma_0+j\omega_0} + \cdots + \frac{R_n}{s-p_n}$$

- Anche il procedimento di calcolo dei residui rimane invariato:

$$R_1 = \lim_{s\to\sigma_0+j\omega_0} (s-\sigma_0-j\omega_0)F(s)$$

$$R_2 = \lim_{s\to\sigma_0-j\omega_0} (s-\sigma_0+j\omega_0)F(s) = R_1^*$$

- Notiamo che i residui associati ad una coppia di radici complesse coniugate sono numeri complessi coniugati

Antitrasformazione in presenza radici $\mathbb{C}$ (1/2)

- Occorre però fare attenzione all'antitrasformata della coppia di fratti semplici:

$$\boxed{\frac{R_1}{s-\sigma_0-j\omega_0}+\frac{R_1^*}{s-\sigma_0+j\omega_0}}$$

- Applicando la proprietà: $Re^{at}\varepsilon(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R}{s-a}\right\}$ si ottiene:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{R_1}{s-\sigma_0-j\omega_0}+\frac{R_1^*}{s-\sigma_0+j\omega_0}\right\}=\left(R_1e^{(\sigma_0+j\omega_0)t}+R_1^*e^{(\sigma_0-j\omega_0)t}\right)\varepsilon(t)}$$

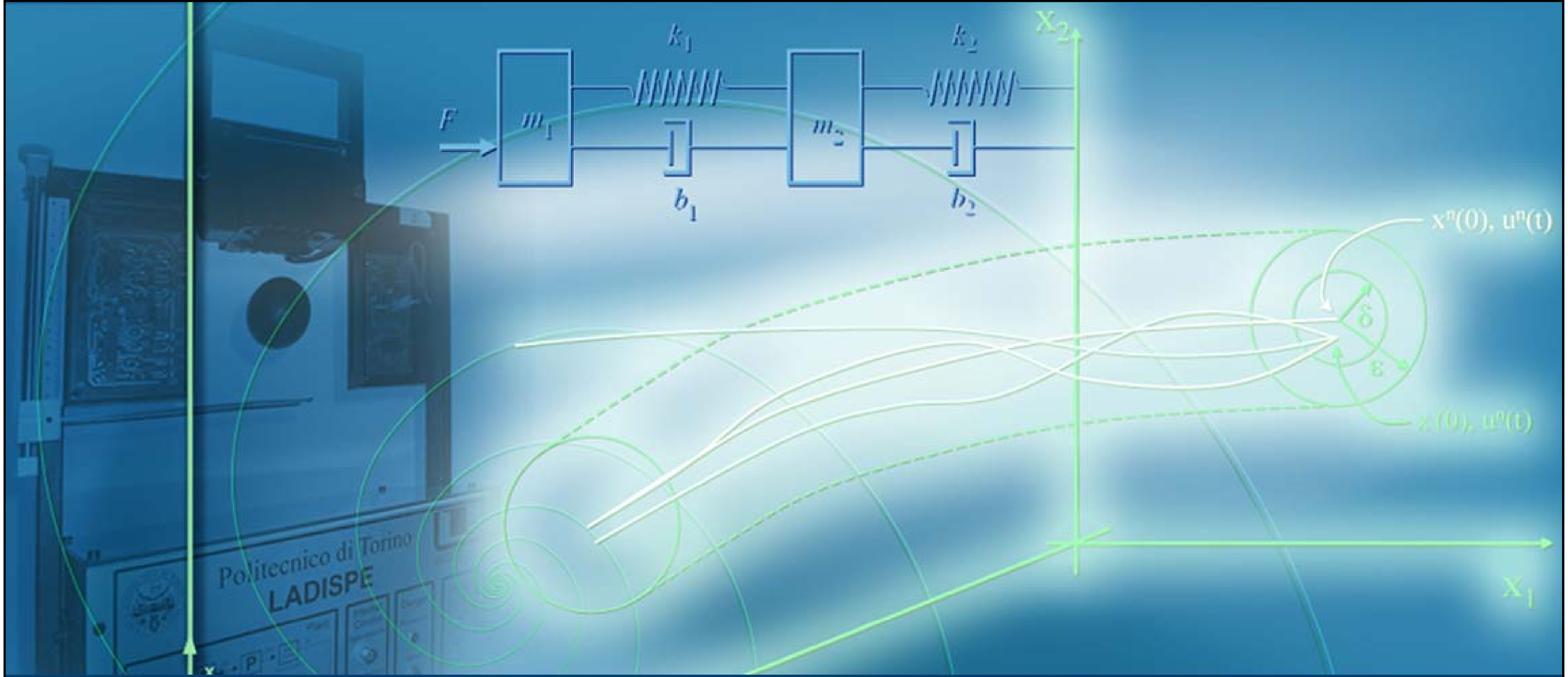
Antitrasformazione in presenza radici $\mathbb{C}$ (2/2)

- Utilizzando le formule di Eulero si ha:

$$\left(R_1 e^{(\sigma_0+j\omega_0)t} + R_1^* e^{(\sigma_0-j\omega_0)t}\right)\varepsilon(t) = 2\left|R_1\right| e^{\sigma_0 t}\cos(\omega_0 t + \arg(R_1))\varepsilon(t)$$

$$\left|R_1\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(R_1) + \mathrm{Im}^2(R_1)}, \arg(R_1) = \arctan\frac{\mathrm{Im}(R_1)}{\mathrm{Re}(R_1)}$$

- Pertanto, l'antitrasformata di una coppia di fratti semplici corrispondenti a radici $\mathbb{C}$ va sempre considerata nel suo insieme



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Esempio di soluzione 2

Formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

- Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita $y(t)$ nel caso in cui:
  - L'ingresso sia un gradino di ampiezza unitaria ($u(t) = \varepsilon(t)$)
  - Le condizioni iniziali siano: $x(0) = [1 \ \ 1]^T$

Procedimento di soluzione

- I passi da seguire sono:
  - Calcolo della soluzione $Y(s)$ nel dominio della trasformata di Laplace
  - Calcolo della scomposizione in fratti semplici (e dei corrispondenti residui) di $Y(s)$
  - Calcolo di $y(t)$ tramite antitrasformazione della scomposizione in fratti semplici di $Y(s)$

Impostazione dei calcoli in dom(s)

- Soluzione nel dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) = \underbrace{C\left(sI - A\right)^{-1} x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\left[C\left(sI - A\right)^{-1} B + D\right]U(s)}_{Y_f(s)}$$

- Con

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D = [0], x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, U(s) = \frac{1}{s}$$

Passi della soluzione in dom(s)

$$Y(s) = \underbrace{C\left(sI - A\right)^{-1} x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\left[C\left(sI - A\right)^{-1} B + D\right] U(s)}_{Y_f(s)}$$

- Per calcolare $Y(s)$ procediamo come segue:
  - Calcolo del termine $(s\,I - A)^{-1}$
  - Calcolo della risposta libera $Y_\ell(s)$
  - Calcolo della risposta forzata $Y_f(s)$
  - Calcolo di $Y(s)$ come $Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s)$
  - Scomposizione i fratti semplici di $Y(s)$

Calcolo di $(s\,I - A)^{-1}$

- Si ricordi che: $(sI - A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(sI - A)} Adj(sI - A)$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{s^2+6s+13}}_{\det(sI-A)} \underbrace{\begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}}_{Adj(sI-A)} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+6s+13} & \dfrac{2}{s^2+6s+13} \\ \dfrac{-2}{s^2+6s+13} & \dfrac{s+3}{s^2+6s+13} \end{bmatrix}$$

Calcolo di $Y_\ell(s)$

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+6s+13} & \dfrac{2}{s^2+6s+13} \\ \dfrac{-2}{s^2+6s+13} & \dfrac{s+3}{s^2+6s+13} \end{bmatrix}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x(0)} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{-2}{s^2+6s+13} & \dfrac{s+3}{s^2+6s+13} \end{bmatrix}}_{C(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x(0)} = \frac{s+1}{s^2+6s+13}$$

Calcolo di $Y_f(s)$

$$Y_f(s) = \left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]U(s) \underset{\substack{\uparrow \\ D=0}}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+6s+13} & \dfrac{2}{s^2+6s+13} \\ \dfrac{-2}{s^2+6s+13} & \dfrac{s+3}{s^2+6s+13} \end{bmatrix}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\frac{1}{s}}_{U(s)}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{-2}{s^2+6s+13} & \dfrac{s+3}{s^2+6s+13} \end{bmatrix}}_{C(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\frac{1}{s}}_{U(s)} = \frac{-2}{s^2+6s+13} \underbrace{\frac{1}{s}}_{U(s)} = \frac{-2}{s^3+6s^2+13s}$$

Calcolo di $Y(s)$

- $Y(s)$ si calcola come somma di $Y_\ell(s)$ e $Y_f(s)$

$$Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s) = \frac{s^2+s-2}{s^3+6s^2+13s} =$$
$$= \frac{s^2+s-2}{s(s+3-2j)(s+3+2j)}$$

- Notiamo che nel denominatore di $Y(s)$ è presente una coppia di radici $\mathbb{C}$ con $\sigma_0 = -3$ e $\omega_0 = 2$

Fratti semplici e residui di $Y(s)$

- Scomposizione in fratti semplici di $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s^2+s-2}{s(s+3-2j)(s+3+2j)} = \frac{R_1}{s+3-2j} + \frac{R_1^*}{s+3+2j} + \frac{R_2}{s}$$

- Calcolo dei residui:

$$R_1 = \lim_{s \to -3+2j} (s+3-2j)Y(s) =$$

$$= \lim_{s \to -3+2j} (s+3-2j) \frac{s^2+s-2}{s(s+3-2j)(s+3+2j)} = 0.5769 + 0.3846j$$

$$R_2 = \lim_{s \to 0} sY(s) =$$

$$= \lim_{s \to 0} s \frac{s^2+s-2}{s(s+3-2j)(s+3+2j)} = -0.1538$$

Risultato in dom(s)

- Si ottiene quindi:

$$Y(s) = \frac{0.5769 + 0.3846j}{s+3-2j} + \frac{0.5769 - 0.3846j}{s+3+2j} - \frac{0.1538}{s}$$

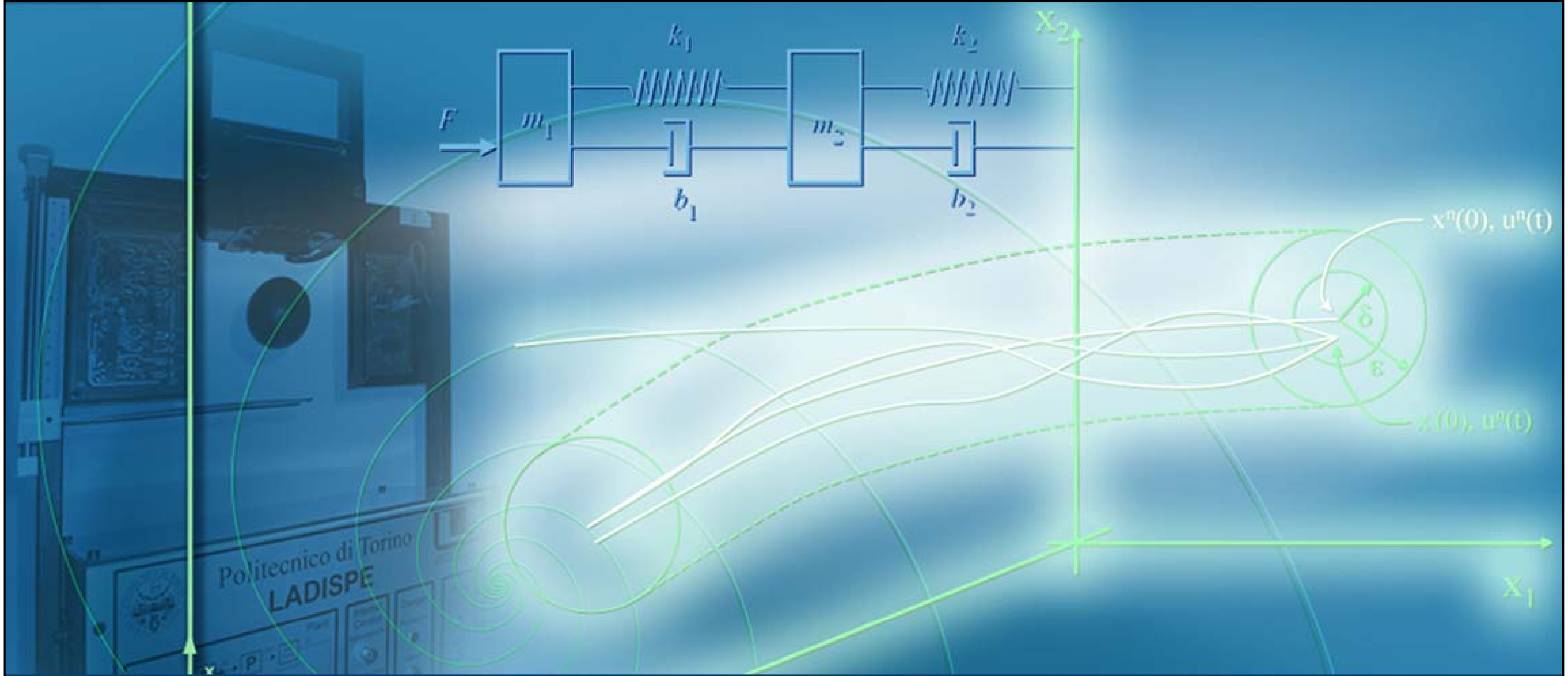
- Per l'antitrasformazione della coppia di fratti semplici corrispondenti alle radici complesse coniugate si ha:

$$\sigma_0 = -3, \omega_0 = 2$$
$$R_1 = 0.5769 + 0.3846j$$
$$|R_1| = \sqrt{(0.5769)^2 + (0.3846)^2} = 0.6934$$
$$\arg(R_1) = \arctan\left(\frac{0.3846}{0.5769}\right) = 0.588\,\text{rad}$$

Risultato in dom(t)

- L'espressione analitica di $y(t)$ è quindi:

$$y(t) = \left(\underbrace{1.3868}_{2|R_1|} e^{-\overset{\sigma_0}{\overset{\downarrow}{3}}\, t} \cos(\overset{\omega_0}{\overset{\downarrow}{2}}\, t + \underbrace{0.588}_{\arg(R_1)}) - 0.1538 \right) \varepsilon(t)$$



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Scomposizione in fratti semplici (parte III)

Caso di $F(s)$ con radici multiple

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}$$

- Supponiamo ora che:
  - $N_F(s)$ e $D_F(s)$ non abbiano radici in comune
  - Il denominatore di $F(s)$ abbia r ($r < n$) radici distinte con molteplicità maggiore o uguale a 1
  - $F(s)$ sia strettamente propria ($m < n$)
- Indichiamo con
  - $p_i \rightarrow$ i- esima radice distinta del denominatore di $F(s)$, ($i=1, \ldots, r$)
  - $\mu_i \rightarrow$ molteplicità della radice p_i, ($i=1, \ldots, r$, $\Sigma^r_{i=1} \mu_i = n$)

Scomposizione in fratti semplici con radici multiple

- Si può fattorizzare il denominatore di $F(s)$ mettendo in evidenza le r radici distinte con la rispettiva molteplicità:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)^{\mu_1}(s-p_2)^{\mu_2}\cdots(s-p_r)^{\mu_r}}$$

- La scomposizione in fratti semplici di $F(s)$ è definita da:

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\mu_1} \frac{R_{1,k}}{(s-p_1)^k} + \sum_{k=1}^{\mu_2} \frac{R_{2,k}}{(s-p_2)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{\mu_r} \frac{R_{r,k}}{(s-p_r)^k} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{R_{i,k}}{(s-p_i)^k}$$

Calcolo dei residui con radici multiple (1/2)

- In questo caso, la formula generale per calcolare i residui $R_{i,k}$ (associati alla radice p_i di molteplicità μ_i) è:

$$\boxed{R_{i,k} = \lim_{s \to p_i} \frac{1}{(\mu_i - k)!} \frac{d^{\mu_i - k}}{ds^{\mu_i - k}} \left[(s - p_i)^{\mu_i} F(s) \right], k = 1, \ldots, \mu_i}$$

- Nel caso $\mu_i = 1$ si ottiene la formula nota

$$\boxed{R_{i,1} = \lim_{s \to p_i} (s - p_i) F(s)}$$

Calcolo dei residui con radici multiple (2/2)

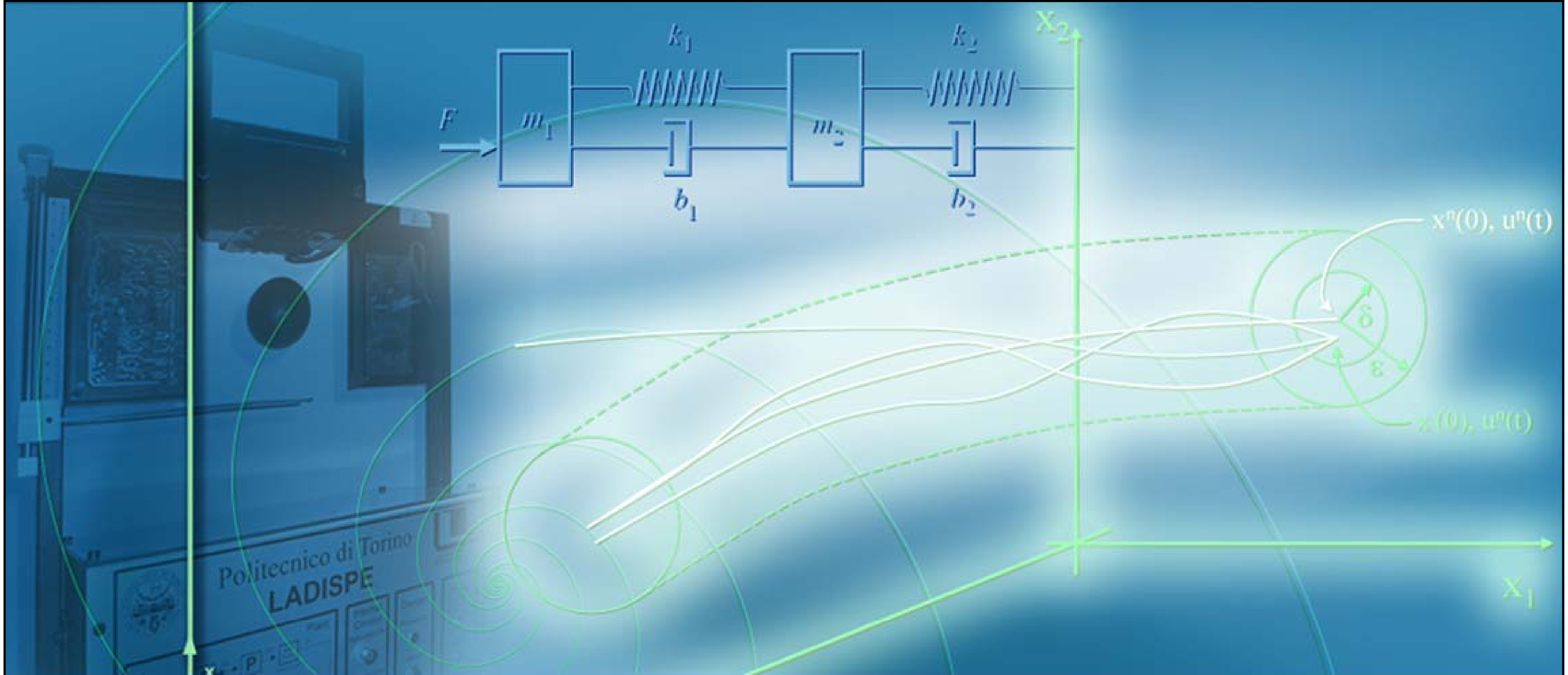
$$R_{i,k} = \lim_{s \to p_i} \frac{1}{(\mu_i - k)!} \frac{d^{\mu_i - k}}{ds^{\mu_i - k}} \left[(s - p_i)^{\mu_i} F(s) \right], k = 1, \dots, \mu_i$$

- Nel caso $\mu_i = 2$ si ha:

$$R_{i,1} = \lim_{s \to p_i} \frac{d}{ds} \left[(s - p_i)^2 F(s) \right] \to \frac{R_{i,1}}{s - p_1}$$

$$R_{i,2} = \lim_{s \to p_i} \left[(s - p_i)^2 F(s) \right] \to \frac{R_{i,2}}{(s - p_1)^2}$$

- Nota: il medesimo procedimento si applica al caso di radici complesse



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Esempio di soluzione 3

Formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

- Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita $y(t)$ nel caso in cui
  - L'ingresso sia una rampa di ampiezza 2 ($u(t) = 2\, t\, \varepsilon(t)$)
  - Le condizioni iniziali siano nulle

Procedimento di soluzione

- I passi da seguire sono:
  - Calcolo della soluzione $Y(s)$ nel dominio della trasformata di Laplace
  - Calcolo della scomposizione in fratti semplici (e dei corrispondenti residui) di $Y(s)$
  - Calcolo di $y(t)$ tramite antitrasformazione della scomposizione in fratti semplici di $Y(s)$

Impostazione dei calcoli in dom(s)

- Soluzione nel dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) = \underbrace{C\left(sI - A\right)^{-1} x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\left[C\left(sI - A\right)^{-1} B + D\right]U(s)}_{Y_f(s)}$$

- Con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D = [0], x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, U(s) = \frac{2}{s^2}$$

Passi della soluzione in dom(s)

$$\boxed{Y(s) = \underbrace{C\left(sI - A\right)^{-1} x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\left[C\left(sI - A\right)^{-1} B + D\right] U(s)}_{Y_f(s)}}$$

- Per calcolare $Y(s)$ notiamo innanzi tutto che, essendo nulle le condizioni iniziali, è necessario trovare la sola risposta forzata
- Procediamo quindi nel seguente modo:
  - Calcolo del termine $(s\,I - A)^{-1}$
  - Calcolo della risposta forzata $Y_f(s) \rightarrow Y(s) = Y_f(s)$
  - Scomposizione i fratti semplici di $Y(s)$

Calcolo di $(s\,I - A)^{-1}$

- Si ricordi che: $(sI - A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(sI - A)} Adj(sI - A)$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & 16 \\ -1 & s+8 \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{s^2 + 8s + 16}}_{\det(sI-A)} \underbrace{\begin{bmatrix} s+8 & -16 \\ 1 & s \end{bmatrix}}_{Adj(sI-A)} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+8}{s^2+8s+16} & \dfrac{-16}{s^2+8s+16} \\ \dfrac{1}{s^2+8s+16} & \dfrac{s}{s^2+8s+16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+8}{(s+4)^2} & \dfrac{-16}{(s+4)^2} \\ \dfrac{1}{(s+4)^2} & \dfrac{s}{(s+4)^2} \end{bmatrix}$$

Calcolo di $Y(s) = Y_f(s)$

$$Y(s) = Y_f(s) = \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]U(s) \underset{\substack{\uparrow \\ D=0}}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s+8}{(s+4)^2} & \frac{-16}{(s+4)^2} \\ \frac{1}{(s+4)^2} & \frac{s}{(s+4)^2} \end{bmatrix}}_{(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\frac{2}{s^2}}_{U(s)} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+4)^2} & \frac{s}{(s+4)^2} \end{bmatrix}}_{C(sI-A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\frac{2}{s^2}}_{U(s)} = \frac{(2s+1)}{(s+4)^2}\frac{2}{s^2} = \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2}$$

Scomposizione in fratti semplici

- Si ha quindi:

$$\boxed{Y(s) = \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2}}$$

- Notiamo che nel denominatore di $Y(s)$ sono presenti le radici $p_1 = 0$ e $p_2 = -4$ entrambe di molteplicità 2 ($\mu_1 = \mu_2 = 2$)
- La scomposizione in fratti semplici è pertanto:

$$\boxed{Y(s) = \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} = \frac{R_{1,1}}{s} + \frac{R_{1,2}}{s^2} + \frac{R_{2,1}}{s+4} + \frac{R_{2,2}}{(s+4)^2}}$$

Calcolo dei residui (1/2)

$$Y(s)=\frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2}=\frac{R_{1,1}}{s}+\frac{R_{1,2}}{s^2}+\frac{R_{2,1}}{s+4}+\frac{R_{2,2}}{(s+4)^2}$$

- Calcolo dei residui associati alla radice $p_1 = 0$:

$$R_{1,1}=\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s)\right]=\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[s^2\,\frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2}\right]$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{4(s+4)^2-(2s+8)\cdot 2(2s+1)}{(s+4)^4}=\lim_{s\to 0}\frac{2(-2s+6)}{(s+4)^3}=0.1875$$

$$R_{1,2}=\lim_{s\to 0}\left[s^2Y(s)\right]$$

$$=\lim_{s\to 0}\left[s^2\,\frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2}\right]=0.125$$

Calcolo dei residui (2/2)

$$Y(s) = \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} = \frac{R_{1,1}}{s} + \frac{R_{1,2}}{s^2} + \frac{R_{2,1}}{s+4} + \frac{R_{2,2}}{(s+4)^2}$$

- Calcolo dei residui associati alla radice $p_2 = -4$:

$$R_{2,1} = \lim_{s\to -4} \frac{d}{ds}\left[(s+4)^2 Y(s)\right] = \lim_{s\to -4} \frac{d}{ds}\left[(s+4)^2 \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2}\right] =$$

$$= \lim_{s\to -4} \frac{4s^2 - 2s \cdot 2(2s+1)}{s^4} = \lim_{s\to -4} \frac{-4(s+1)}{s^3} = \text{-0.1875}$$

$$R_{2,2} = \lim_{s\to -4}\left[(s+4)^2 Y(s)\right]$$

$$= \lim_{s\to -4}\left[(s+4)^2 \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2}\right] = -0.875$$

Risultato

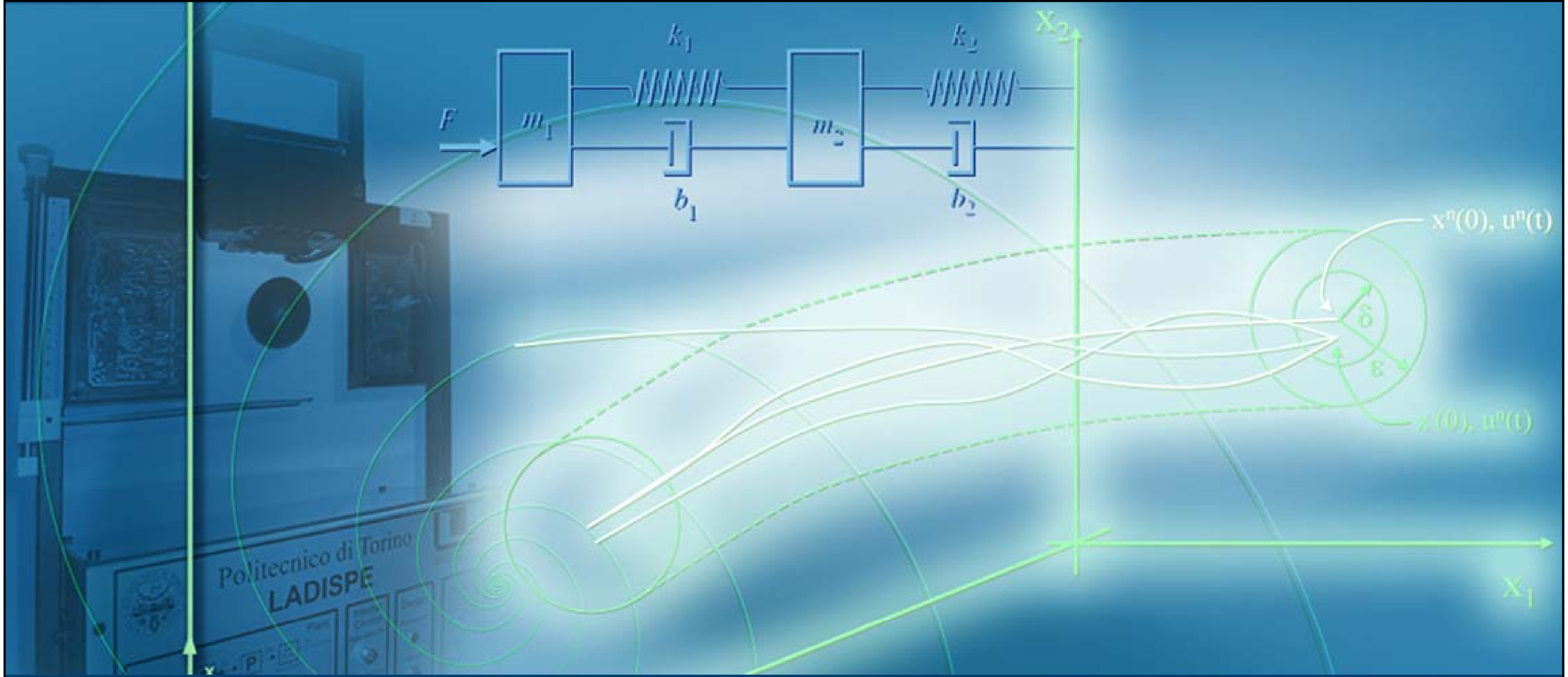
- Si ottiene quindi:

$$Y(s)=\frac{R_{1,1}}{s}+\frac{R_{1,2}}{s^2}+\frac{R_{2,1}}{s+4}+\frac{R_{2,2}}{(s+4)^2}=$$
$$=\frac{0.1875}{s}+\frac{0.125}{s^2}-\frac{0.1875}{s+4}-\frac{0.875}{(s+4)^2}$$

- Si può procedere con l'antitrasformazione ricordando che:

$$Re^{at}\varepsilon(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R}{s-a}\right\},\quad Rte^{at}\varepsilon(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R}{(s-a)^2}\right\}$$

$$y(t)=\left(0.1875+0.125t-0.1875e^{-4t}-0.875te^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$



Esempi di soluzione per sistemi LTI TC

Considerazioni finali

Caso di $F(s)$ non strettamente propria (1/3)

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}$$

- Nel caso in cui $F(s)$ non sia strettamente propria ($m = n$) prima di procedere alla scomposizione in fratti semplici occorre compiere la divisione (polinomiale) tra il numeratore $N_F(s)$ il denominatore $D_F(s)$

Caso di $F(s)$ non strettamente propria (2/3)

- Indicando con
  - $K = b_m$ il quoziente
  - $N_F^{'}(s)$ il resto

  della divisione tra $N_F(s)$ e $D_F(s)$ si ha:

$$F(s) = K + \frac{N_F^{'}(s)}{D_F(s)} =$$

$$= b_m + \underbrace{\frac{\overbrace{c_g s^g + c_{g-1} s^{g-1} + \cdots + c_1 s + c_0}^{N_F^{'}(s)}}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}}_{F'(s)} = b_m + F'(s), \quad g < n$$

Caso di $F(s)$ non strettamente propria (3/3)

- A questo punto, i procedimenti di scomposizione in fratti semplici visti in precedenza si possono applicare alla funzione $F'(s)$ (strettamente propria)
- L'espressione dell'antitrasformata di $F(s)$ sarà quindi la somma di un termine impulsivo del tipo $b_m\delta(t)$ e del risultato di antitrasformazione corrispondente a $F'(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{b_m + F'(s)\} =$$
$$= b_m\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}$$

MatLab

- Il calcolo dei residui della scomposizione in fratti semplici può essere svolto in MatLab mediante l'istruzione: `[R,p,K]=residue(num,den)`
  - `num, den:` numeratore e denominatore (in formato polinomiale) della funzione da scomporre $F(s)$
  - R: vettore dei residui
  - p: radici del denominatore della funzione da scomporre
  - K: quoziente della divisione tra numeratore e denominatore di $F(s)$
- Per maggiori dettagli, digitare `help residue` al prompt di MatLab