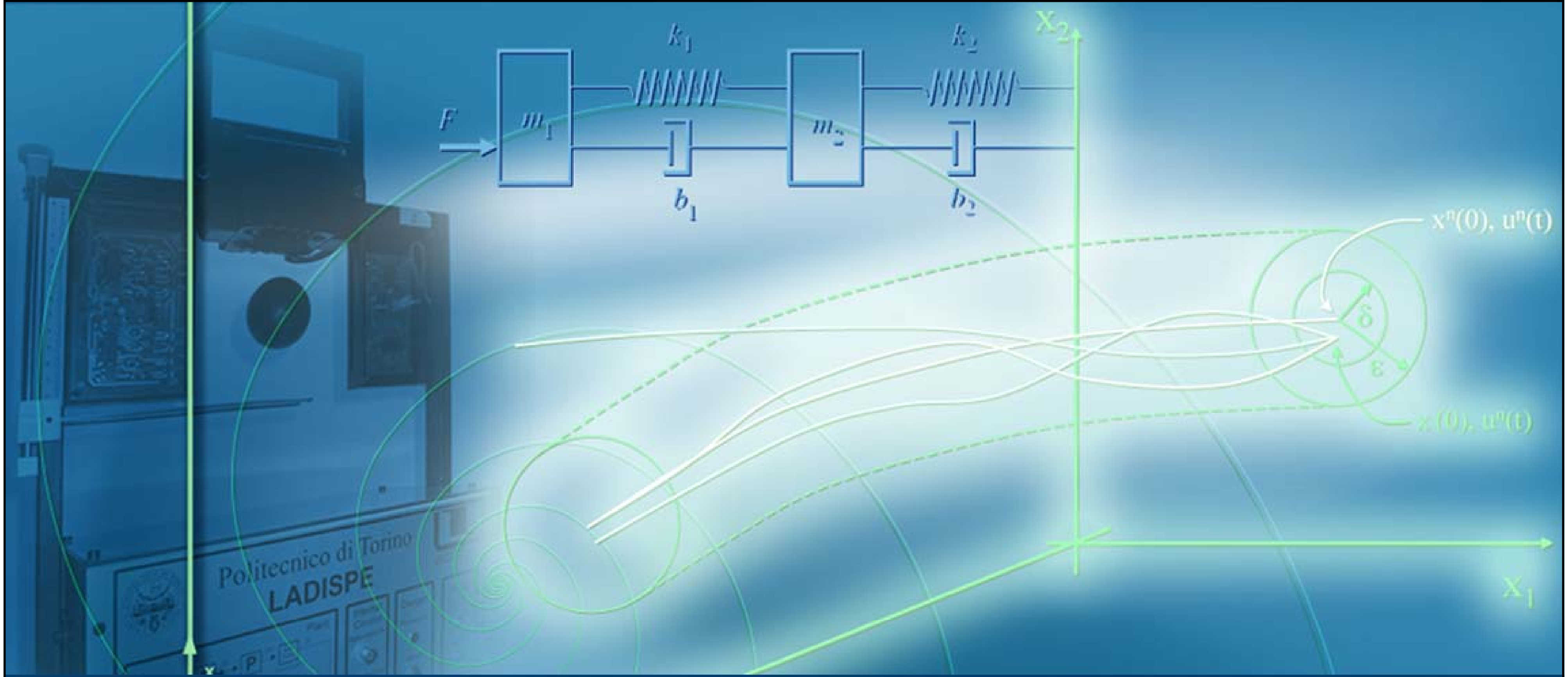
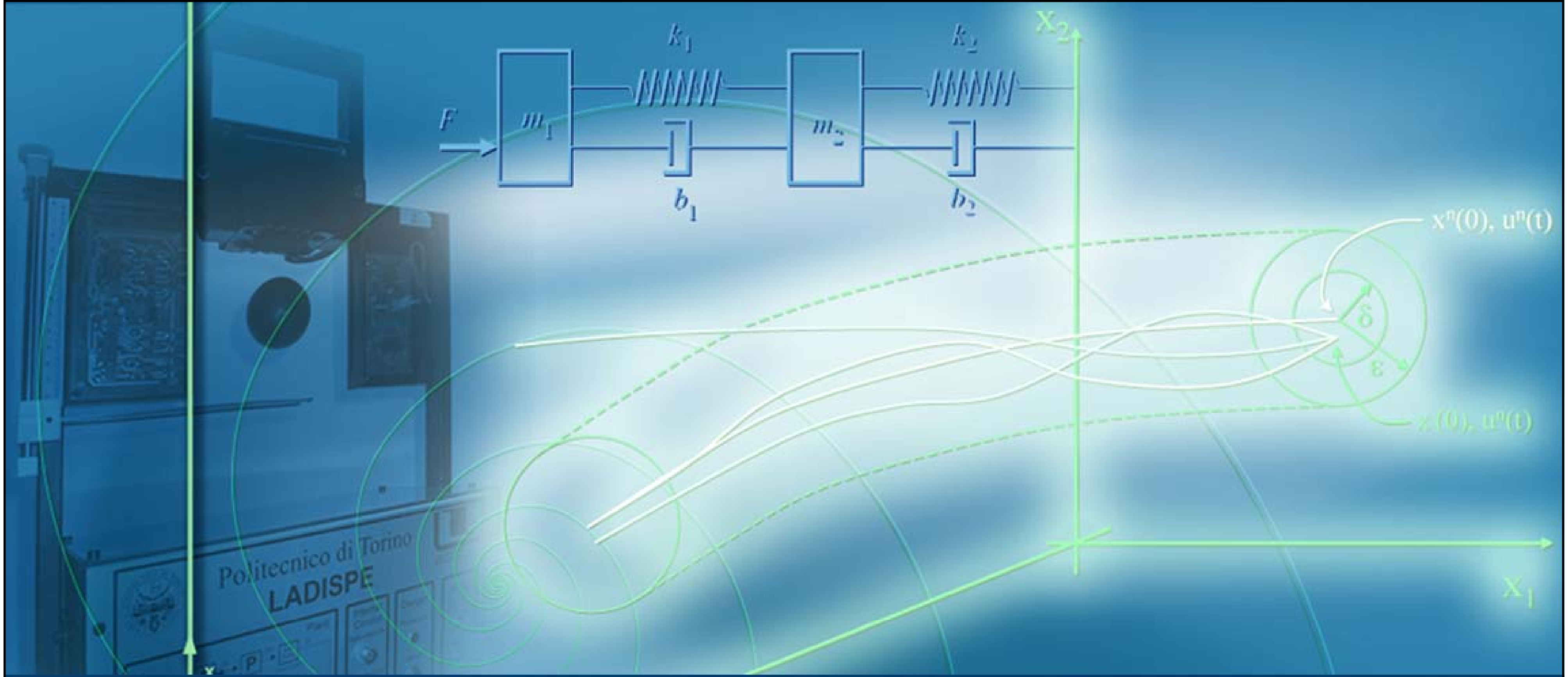


Fondamenti di Automatica

Unità 5
Stabilità esterna e analisi della risposta

Stabilità esterna e analisi della risposta

- Stabilità esterna e risposta a regime
- Risposte di sistemi del I e II ordine

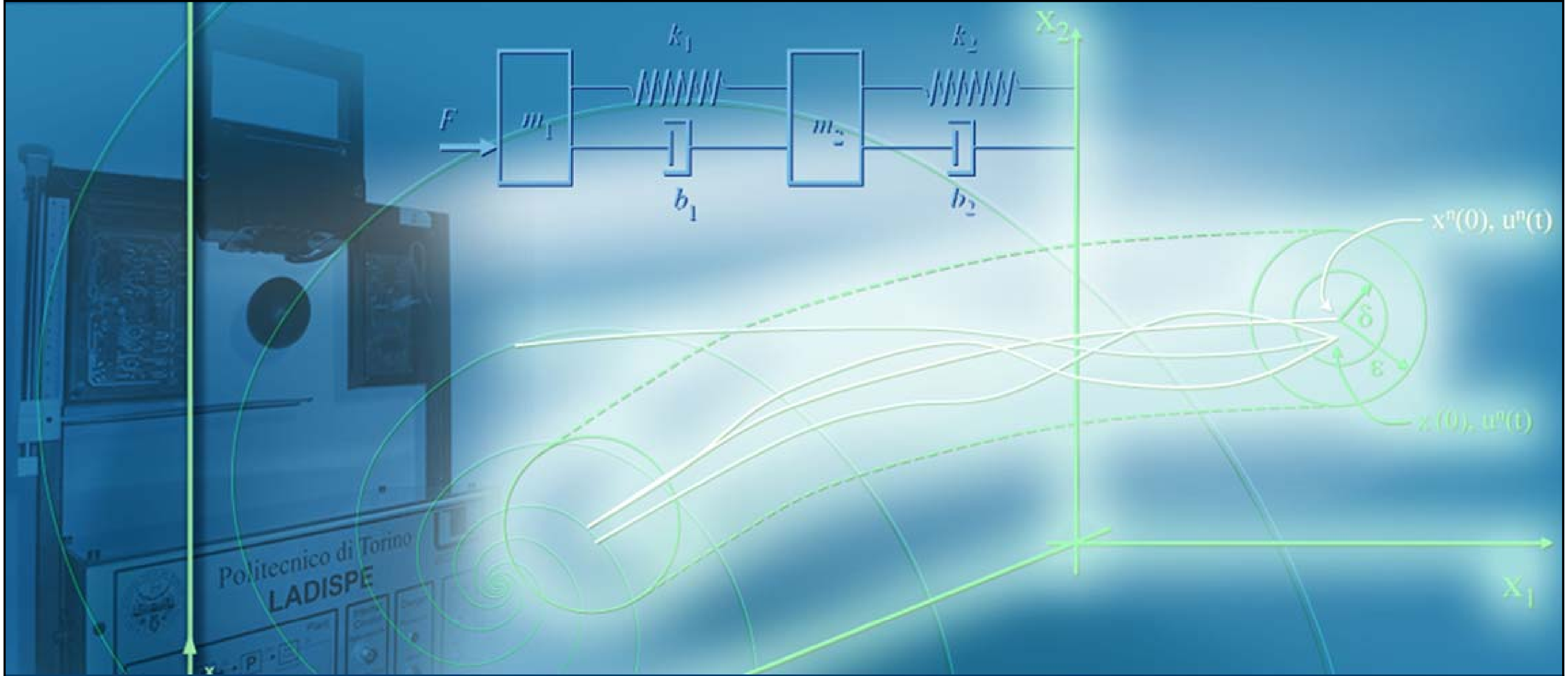


Stabilità esterna e analisi della risposta

Stabilità esterna e risposta a regime

Stabilità esterna e risposta a regime

- Relazioni fra rappresentazioni di sistemi
- Stabilità esterna di sistemi dinamici LTI
- Risposta in regime permanente
- Esempi di calcolo della risposta a regime



Stabilità esterna e risposta a regime

Relazioni fra rappresentazioni di sistemi

Relazioni fra rappresentazioni di sistemi

- La **rappresentazione in variabili di stato** (o **rappresentazione interna**) di un sistema dinamico LTI permette di analizzarne la proprietà di stabilità interna nonché le proprietà strutturali (in particolare, la raggiungibilità e l'osservabilità)
- La **rappresentazione mediante funzioni di trasferimento** (o **rappresentazione esterna**) di un sistema dinamico LTI fornisce in generale una descrizione parziale del comportamento del sistema rispetto a quella ricavabile dalla rappresentazione interna, poiché permette di analizzarne solamente la risposta forzata $\Rightarrow$ dipende soltanto dalla parte raggiungibile ed osservabile del sistema dinamico

Sistema dinamico in forma minima

- Un sistema dinamico LTI è detto in **forma minima** se e soltanto se è completamente raggiungibile e completamente osservabile
- La rappresentazione interna di un sistema dinamico in forma minima contiene sempre il numero minimo di variabili di stato
- La funzione di trasferimento di un sistema dinamico SISO in forma minima non presenta mai cancellazioni zero-polo $\Rightarrow$ tutti gli autovalori della matrice di stato compaiono come poli della funzione di trasferimento
- La funzione di trasferimento di un sistema dinamico SISO non in forma minima presenta invece sempre almeno una cancellazione zero-polo

Esempio di sistema in forma minima

- Il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

è completamente raggiungibile ed osservabile:

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \rho(M_R) = \rho(M_O) = n = 2$$

- La sua funzione di trasferimento è:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{s+13}{(s-1)(s+1)}$$

Esempio di sistema non in forma minima

- Il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

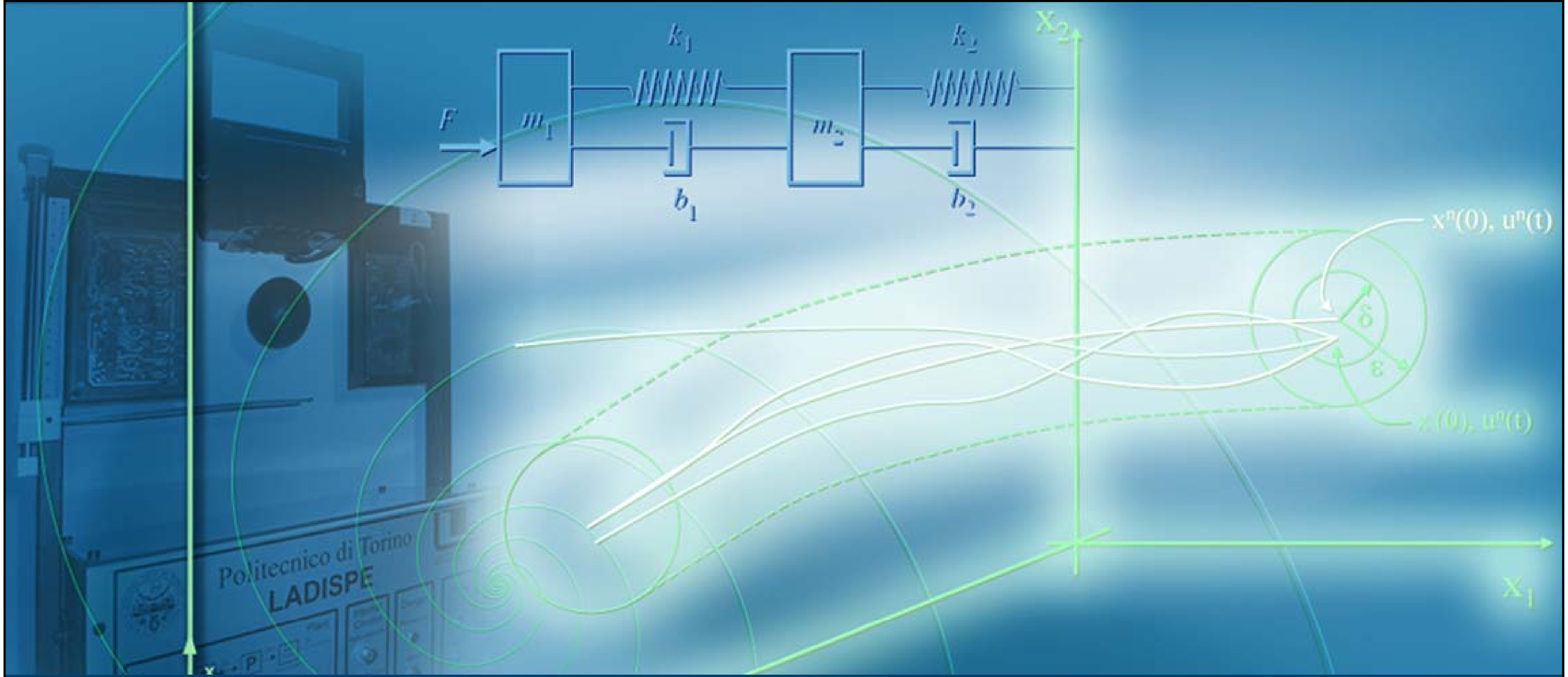
è completamente raggiungibile ma non osservabile:

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \rho(M_R) = n = 2, \quad \rho(M_O) = 1 < n$$

- La sua funzione di trasferimento è:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{-3\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{-3}{s+1}$$



Stabilità esterna e risposta a regime

Stabilità esterna di sistemi dinamici LTI

Stabilità esterna di sistemi dinamici LTI

- Un sistema dinamico, a dimensione finita, LTI, inizialmente a riposo, è **esternamente stabile** o **BIBO stabile** (Bounded Input – Bounded Output) se la sua risposta forzata ad un qualsiasi ingresso limitato si mantiene sempre limitata nel tempo:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \bar{u} \in (0,\infty), \quad \exists \bar{y} \in (0,\infty): \\ \|u(t)\| \le \bar{u}, \forall t \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \|y(t)\| \le \bar{y}, \forall t \ge 0 \end{array}}$$

- Per ipotesi, il sistema è inizialmente a riposo $\Rightarrow$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\} \quad \text{(sistema a tempo continuo)}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)U(z)\} \quad \text{(sistema a tempo discreto)}$$

con $H(s), H(z)$: funzioni di trasferimento del sistema

Condizioni per la stabilità esterna

- Un sistema dinamico, a dimensione finita, a tempo continuo, LTI, inizialmente a riposo, è **BIBO stabile** se e solo se tutti i poli della funzione di trasferimento $H(s)$, dopo aver eseguito le cancellazioni zero-polo, sono a parte reale strettamente minore di 0
- Un sistema dinamico, a dimensione finita, a tempo discreto, LTI, inizialmente a riposo, è **BIBO stabile** se e solo se tutti i poli della funzione di trasferimento $H(z)$, dopo aver eseguito le cancellazioni zero-polo, sono in modulo strettamente minori di 1

Relazioni fra stabilità interna ed esterna

- Se un sistema dinamico, a dimensione finita, LTI, è asintoticamente stabile $\Rightarrow$ è esternamente stabile. Infatti, i poli della funzione di trasferimento sono in generale soltanto un sottoinsieme degli autovalori della matrice di stato, che in questo caso sono tutti asintoticamente stabili per ipotesi
- Se un sistema dinamico, a dimensione finita, LTI, è in forma minima ed esternamente stabile $\Rightarrow$ è asintoticamente stabile. Infatti, gli autovalori della matrice di stato in questo caso coincidono proprio con i poli della funzione di trasferimento, che sono tutti asintoticamente stabili per ipotesi

Esempio di sistema non BIBO stabile

- Il sistema dinamico LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

  considerato in precedenza è in forma minima e la sua funzione di trasferimento è:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s+13}{(s-1)(s+1)}$$

- I poli di $H(s)$ sono $+1$, -1, e coincidono con gli autovalori della matrice di stato A del sistema $\Rightarrow$ il sistema non è esternamente (o BIBO) stabile, mentre è (internamente) instabile

Esempio di sistema BIBO stabile

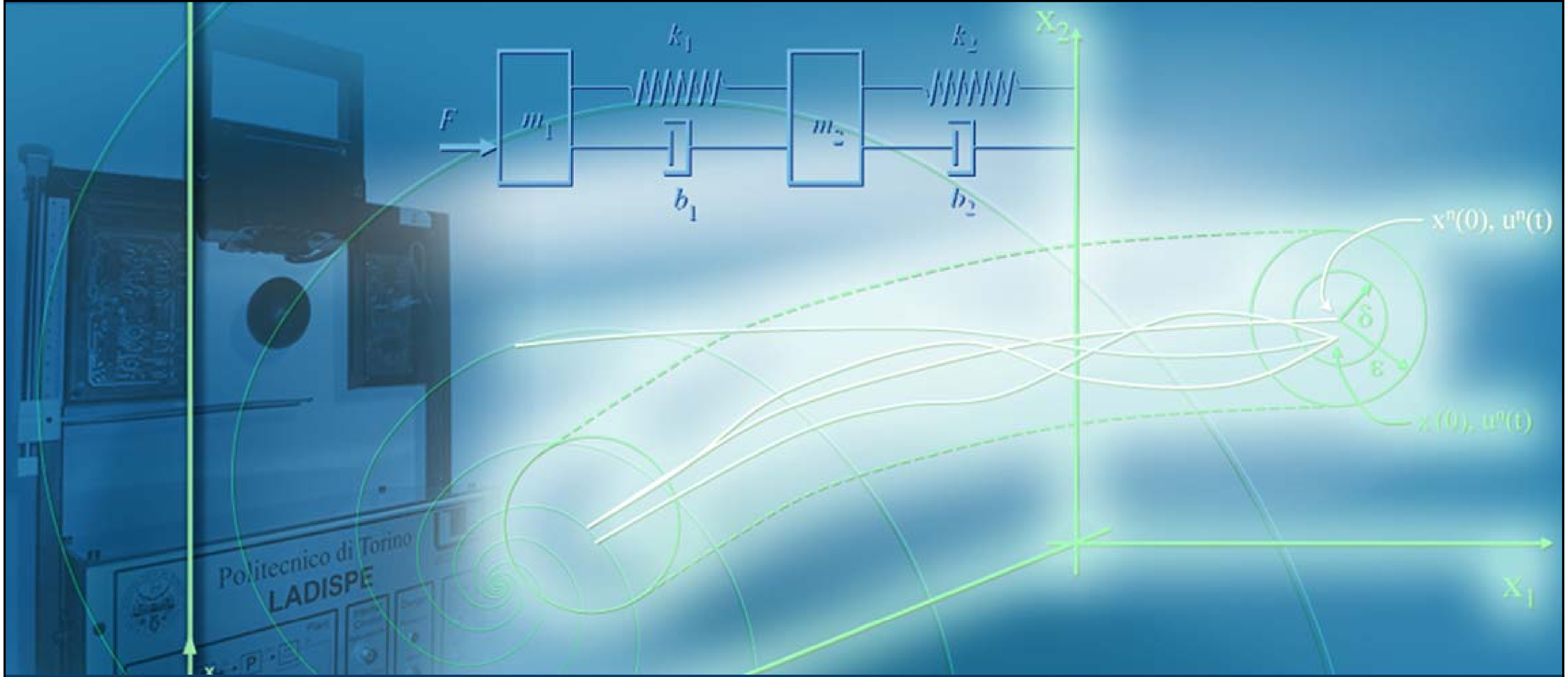
- Il sistema dinamico LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

considerato in precedenza non è in forma minima e la sua funzione di trasferimento è:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{-3\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{-3}{s+1}$$

- Dopo aver eseguito tutte le cancellazioni zero-polo, $H(s)$ ha un polo in -1, che è uno dei due autovalori ($+1$, -1) della matrice di stato A del sistema $\Rightarrow$ il sistema risulta esternamente (o BIBO) stabile, mentre è (internamente) instabile



Stabilità esterna e risposta a regime

Risposta in regime permanente

Risposta in regime permanente (1/6)

- Si consideri il sistema dinamico, a dimensione finita, a tempo continuo, LTI, proprio, descritto da
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$
- Il movimento $x(t)$, soluzione dell'equazione di stato, può essere espresso come:
$$x(t) = x_{omog}(t) + x_{part}(t)$$
  - $x_{omog}(t)$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di stato, in cui $u(t) = 0$
  - $x_{part}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione di stato e dipende dall'ingresso $u(t)$ applicato
- La risposta $y(t)$ può essere allora espressa come:
$$y(t) = C\left[x_{omog}(t) + x_{part}(t)\right] = y_{omog}(t) + y_{part}(t)$$

Risposta in regime permanente (2/6)

- Come conseguenza dei risultati dell'analisi modale, il termine $y_{omog}(t)$ è combinazione lineare dei modi propri del sistema $\Rightarrow$ dipende dagli autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A:

$$y_{omog}(t) = C\,x_{omog}(t) = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{\mu_i'=1}^{\mu_i} \alpha_{i,\mu_i'} m_{i,\mu_i'}(t)$$

$$m_{i,\mu_i'}(t) = t^{\mu_i'-1} e^{\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i)\,t} \cos\left(\mathbb{I}\mathrm{m}(\lambda_i)\,t + \varphi_i\right)$$

- Se il sistema è asintoticamente stabile, cioè se tutti gli autovalori hanno $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) < 0$, allora:

$$\lim_{t\to\infty} y_{omog}(t) = 0$$

$\Rightarrow$ per tempi sufficientemente grandi, $y(t) \cong y_{part}(t)$, cioè tende a una **risposta in regime permanente**

Risposta in regime permanente (3/6)

- Il termine $y_{part}(t)$ dipende sempre dal particolare ingresso $u(t)$ applicato e, nel caso in cui il sistema dinamico sia asintoticamente stabile, costituisce la risposta in regime permanente cui l'uscita $y(t)$ tende per tempi sufficientemente grandi:
  - Se l'ingresso è costante: $u(t) = \bar{u} \cdot \varepsilon(t) \;\Rightarrow$ l'uscita $y(t)$ del sistema tende all'uscita di equilibrio $\bar{y} = -CA^{-1}B\bar{u}$ se il sistema è asintoticamente stabile (A è infatti invertibile poiché $\det(A) = \prod_i \lambda_i(A) \neq 0$) $\Rightarrow$ è costante anche la risposta in regime permanente:

    $$y_{part}(t) = \bar{y} \cdot \varepsilon(t) = -CA^{-1}B\bar{u}\,\varepsilon(t)$$

    Si può calcolare $\bar{y}$ anche col teorema del valore finale:

    $$\bar{y} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,H(s)\,\bar{u}/\cancel{s} = H(0)\,\bar{u}$$

Risposta in regime permanente (4/6)

- Il termine $y_{part}(t)$ dipende sempre dal particolare ingresso $u(t)$ applicato e, nel caso in cui il sistema dinamico sia asintoticamente stabile, costituisce la risposta in regime permanente cui l'uscita $y(t)$ tende per tempi sufficientemente grandi:
  - Se l'ingresso è sinusoidale: $u(t) = \bar{u}\sin(\omega_0 t + \theta_0)\,\varepsilon(t) \Rightarrow$ è sinusoidale anche la risposta in regime permanente cui tende $y(t)$ se il sistema è asintoticamente stabile:

$$y_{part}(t) = \bar{y}\sin(\omega_0 t + \varphi)\,\varepsilon(t)$$

$$\bar{y} = |H(j\omega_0)| \cdot \bar{u}$$

$$\varphi = \arg H(j\omega_0) + \theta_0$$

    essendo $H(s)$ la funzione di trasferimento del sistema

Risposta in regime permanente (5/6)

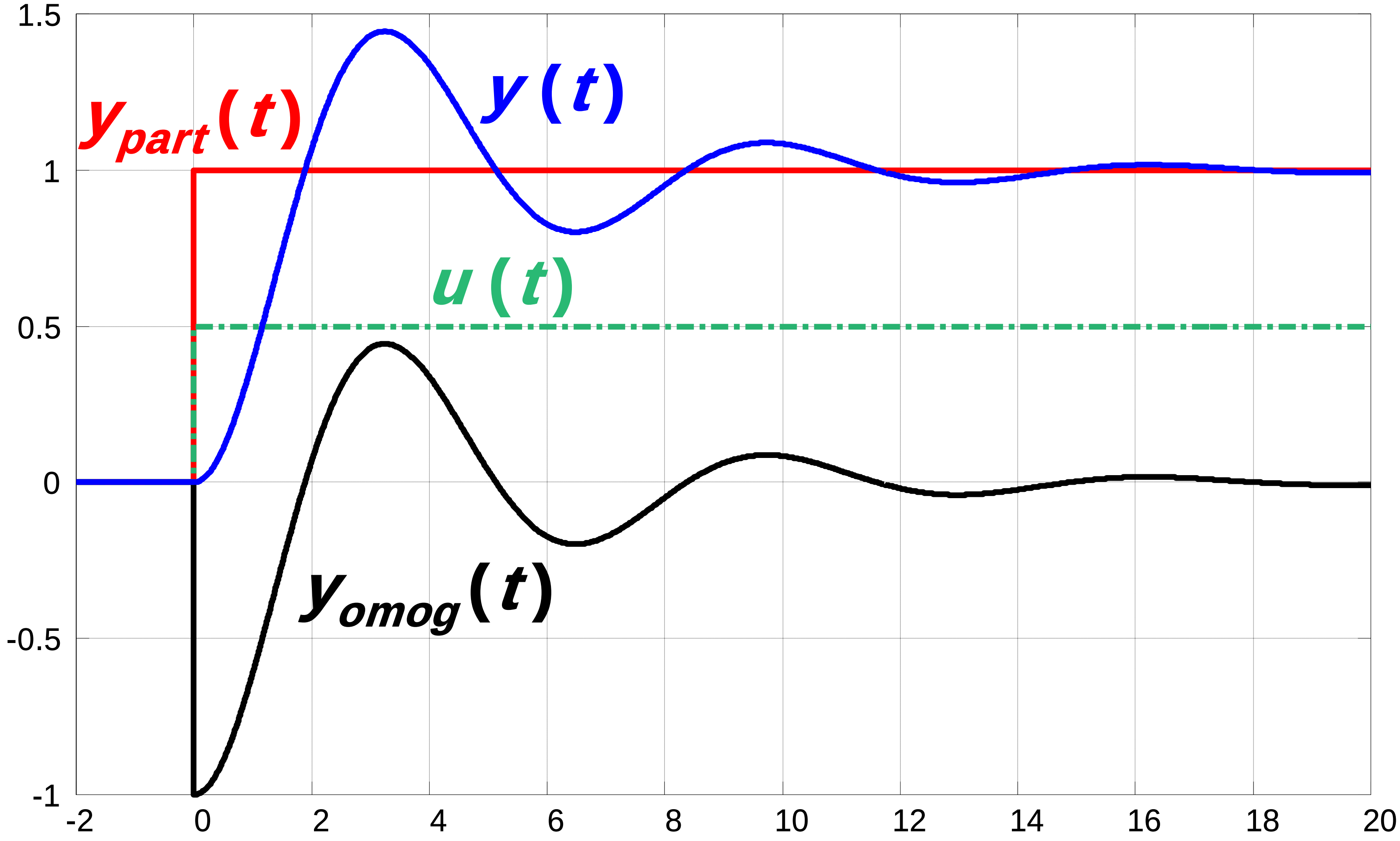
- Se un sistema dinamico è asintoticamente stabile (oppure esternamente stabile ed in forma minima), la sua risposta $y(t)$ ad un qualsiasi ingresso $u(t)$ può quindi essere scomposta in:
  - Un **transitorio iniziale**, che risente anche del contributo del termine $y_{omog}(t)$
  - Una **risposta in regime permanente**, coincidente con il solo termine $y_{part}(t)$
- Esempio: dato il sistema BIBO stabile in forma minima

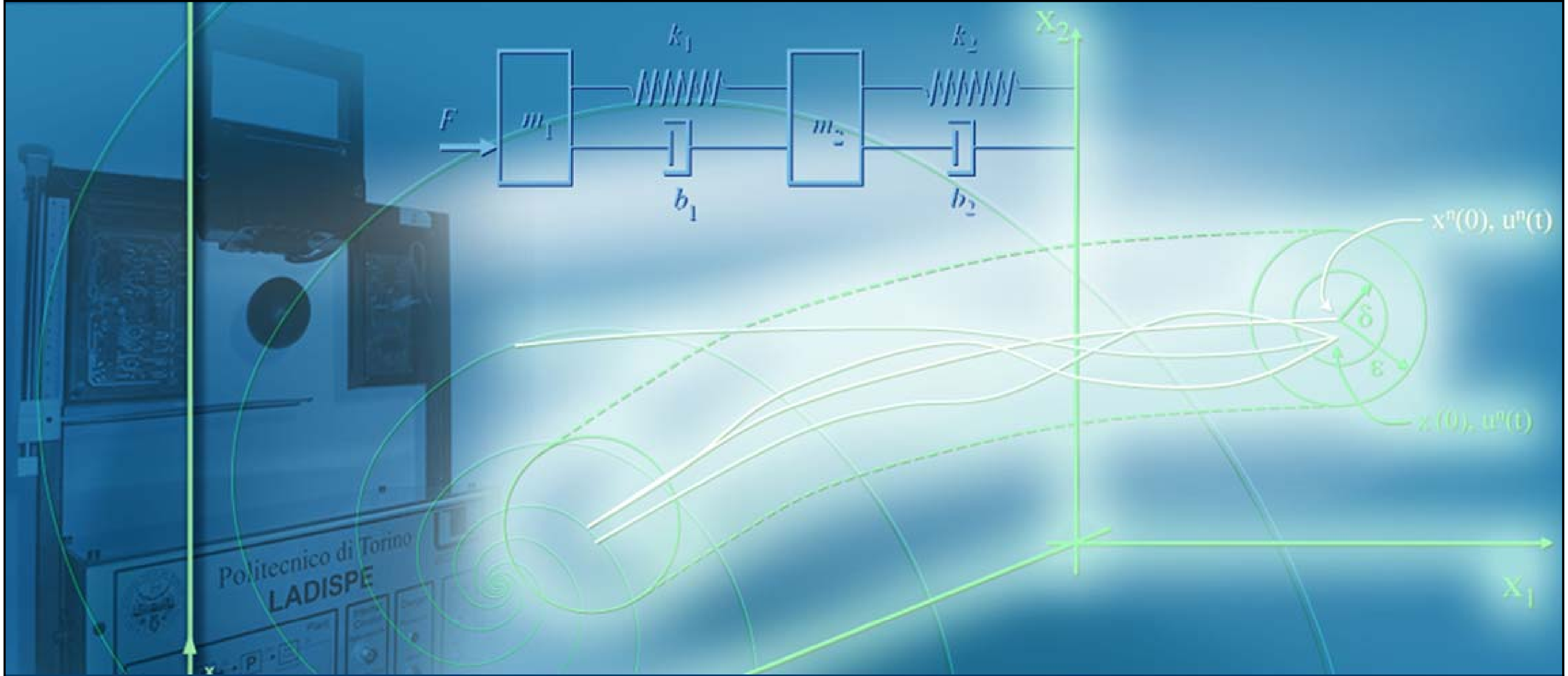
$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 0.5s + 1}$$

la risposta in regime permanente a $u(t) = 0.5\varepsilon(t)$ è:

$$y_{part}(t) = \bar{y}\,\varepsilon(t) = H(0)\,\bar{u}\,\varepsilon(t) = 2 \cdot 0.5\varepsilon(t) = \varepsilon(t)$$

Risposta in regime permanente (6/6)





Stabilità esterna e risposta a regime

Esempi di calcolo della risposta a regime

Esempio #1

- Dato il sistema dinamico in forma minima avente
$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+10)}$$
calcolare, qualora sia possibile, la risposta in regime permanente ad un ingresso costante di ampiezza 2
- Tutti i poli di $H(s)$ hanno parte reale strettamente minore di 0, in quanto valgono –2 e –10
$\Rightarrow$ il sistema è BIBO stabile nonché in forma minima
$\Rightarrow$ il sistema è asintoticamente stabile
$\Rightarrow$ esiste la risposta in regime permanente
- Poiché $u(t) = \bar{u}\varepsilon(t) = 2\varepsilon(t) \Rightarrow$ la risposta a regime è:
$$y_{part}(t) = \bar{y}\,\varepsilon(t) = H(0)\,\bar{u}\,\varepsilon(t) = \frac{1}{20}2\varepsilon(t) = 0.1\varepsilon(t)$$

Esempio #2 (1/2)

- Dato il sistema dinamico in forma minima avente

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+10)}$$

  calcolare, qualora sia possibile, la risposta in regime permanente all'ingresso $u(t) = 2\sin(0.5t)\,\varepsilon(t)$
- Il sistema è asintoticamente stabile (v. Esempio #1) $\Rightarrow$ esiste la risposta in regime permanente
- Poiché $u(t) = \bar{u}\sin(\omega_0 t + \theta_0)\,\varepsilon(t) = 2\sin(0.5t)\,\varepsilon(t)$ $\Rightarrow$ la risposta in regime permanente è sinusoidale:

$$y_{part}(t) = \bar{y}\sin(\omega_0 t + \varphi)\,\varepsilon(t) = \bar{y}\sin(0.5t + \varphi)\,\varepsilon(t)$$

$$\bar{y} = \left|H(j\omega_0)\right| \cdot \bar{u} = 2\left|H(j0.5)\right|$$

$$\varphi = \arg H(j\omega_0) + \theta_0 = \arg H(j0.5)$$

Esempio #2 (2/2)

- Dato il sistema dinamico in forma minima avente

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+10)}$$

calcolare, qualora sia possibile, la risposta in regime permanente all'ingresso $u(t) = 2\sin(0.5t)\,\varepsilon(t)$

- $\left|H(j0.5)\right| = \left|(j0.5+2)(j0.5+10)\right|^{-1} = \left|j0.5+2\right|^{-1}\left|j0.5+10\right|^{-1} =$

$$= \left(\sqrt{0.5^2+2^2}\sqrt{0.5^2+10^2}\right)^{-1} = \left(\sqrt{4.25}\sqrt{100.25}\right)^{-1} = 0.0484$$

- $\arg H(j0.5) = \arg\left(1 / \left[(j0.5+2)(j0.5+10)\right] \right) =$

$$= \arg(1) - \arg(j0.5+2) - \arg(j0.5+10) =$$

$$= 0 - \arctan(0.5/2) - \arctan(0.5/10) = -0.2949\,\text{rad}$$

Esempio #3

- Dato il sistema dinamico in forma minima avente
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s - 6}$$
calcolare, qualora sia possibile, la risposta in regime permanente ad un ingresso costante di ampiezza 2
- Il denominatore di $H(s)$ ha una variazione di segno $\Rightarrow$ per la regola di Cartesio, $H(s)$ ha:
un polo con parte reale strettamente minore di 0 e
un polo con parte reale strettamente maggiore di 0
$\Rightarrow$ il sistema non è BIBO stabile
$\Rightarrow$ il sistema non solo non è asintoticamente stabile, ma addirittura risulta (internamente) instabile
$\Rightarrow$ non esiste una risposta in regime permanente

Es: $$H(s) = \frac{(s-2)(s+5)}{(s+1)(s+2)}$$ sistema in forma minima

calcolare, se possibile, la risposta in regime permanente a $u(t) = 5 \sin(2t)$

$\exists$ reg. permanente

$$y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} y_{perm}(t) = \bar{y} \sin(2t + \varphi)$$

$$\bar{y} = |H(s)|\Big|_{s=j2} \bar{u} = \left| \frac{(j2-2)(j2+5)}{(j2+1)(j2+2)} \right| 5 = 12,04$$

$$\varphi = \angle H(s)\Big|_{s=j2} = \angle \frac{(j2-2)(j2+5)}{(j2+1)(j2+2)} =$$

$$= \angle j2-2 + \angle j2+5 - \angle j2+1 - \angle j2+2 =$$

$$= \mathrm{atan}\left(\frac{2}{-2}\right) + \mathrm{atan}\left(\frac{2}{5}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{2}{1}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$= -\pi/4 + \pi + \ldots = 0,844 \text{ rad/s}$$