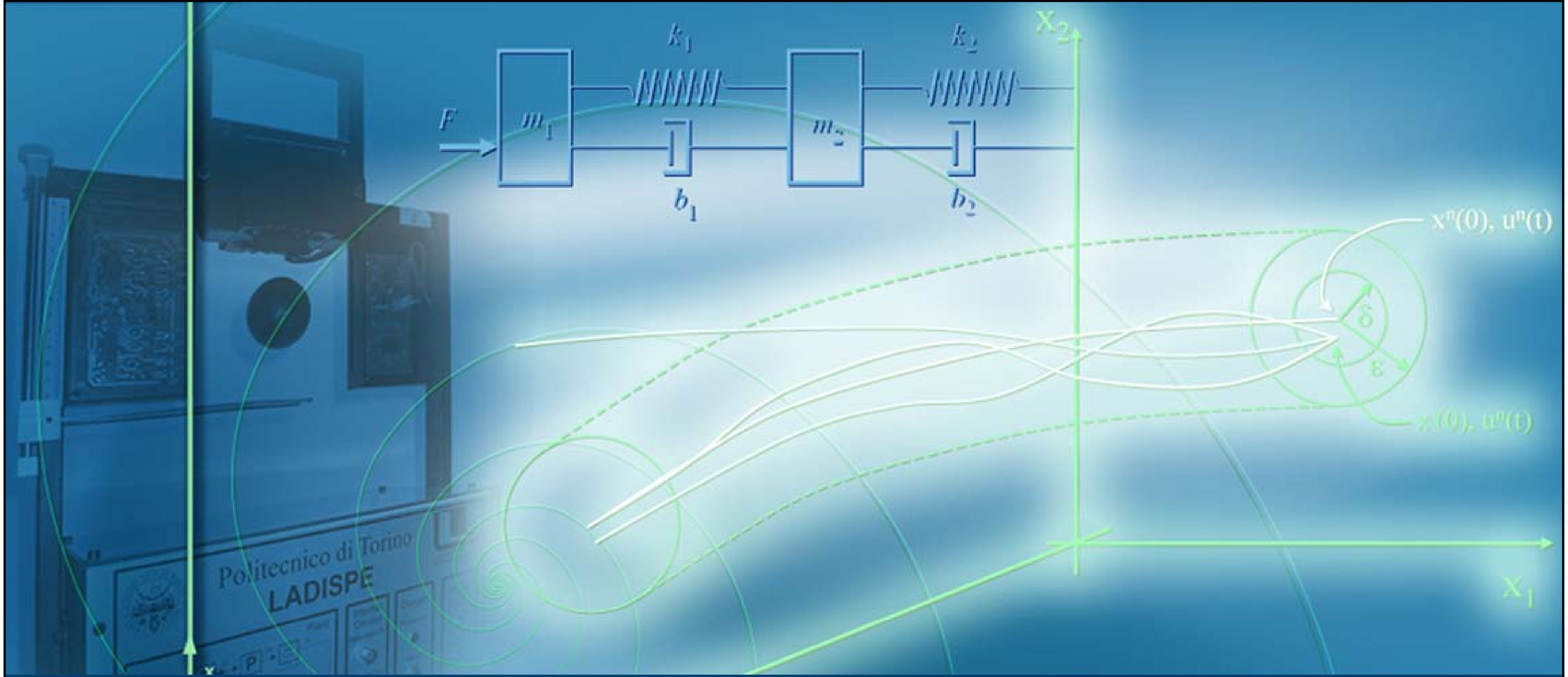
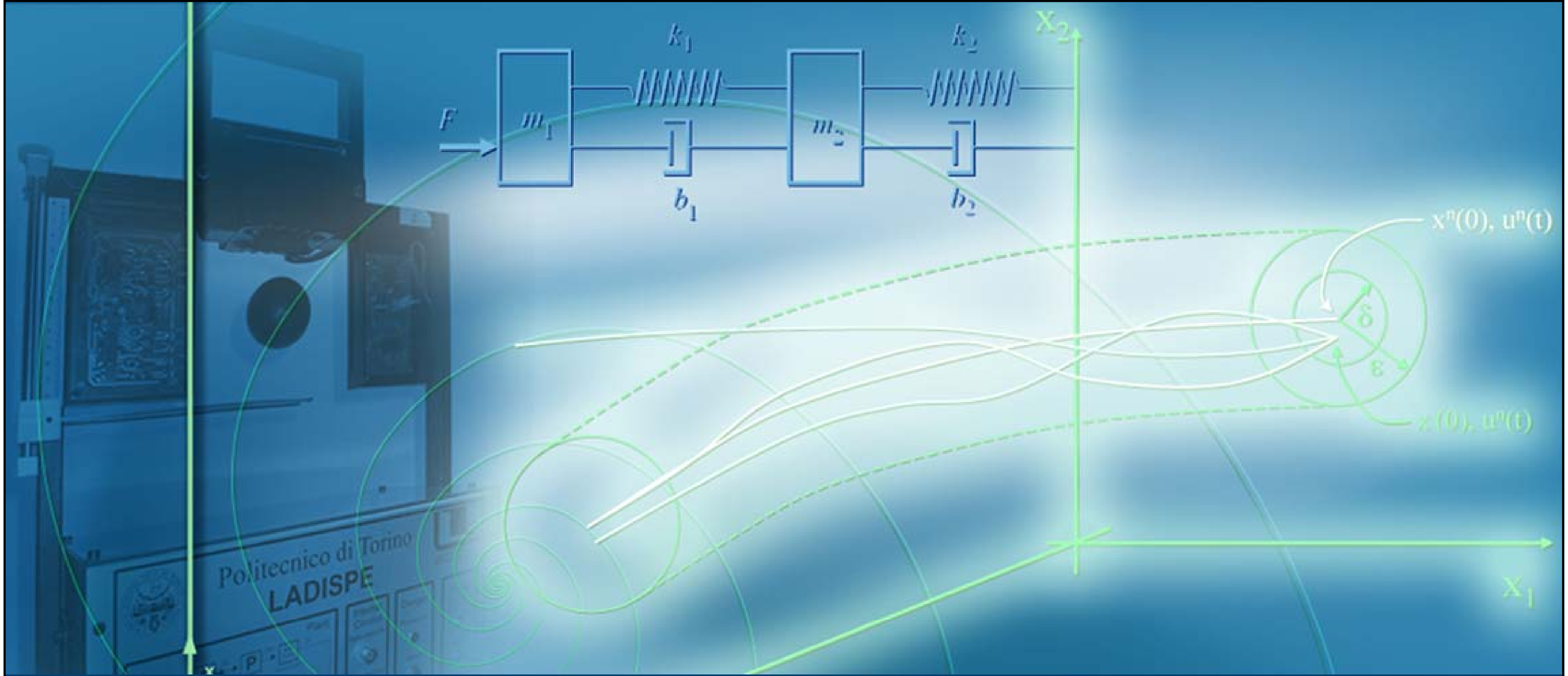


Equilibrio e stabilità di sistemi dinamici

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI

- Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TC
- Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI TC
- Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TD
- Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI TD
- Esempi di analisi della stabilità interna



Stabilità interna di sistemi dinamici LTI

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TC

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TC (1/5)

- Dato un sistema dinamico, a dimensione finita, MIMO, a tempo continuo, lineare e stazionario (LTI), descritto dall'equazione di stato $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, se ne considerino due diverse evoluzioni temporali:
  - Un movimento "nominale" $\tilde{x}(t)$ ottenuto applicando un ingresso "nominale" $\tilde{u}(t)$ al sistema posto in uno stato iniziale "nominale" $\tilde{x}(t_0 = 0) = \tilde{x}_0 \Rightarrow$ $\tilde{x}(t)$ soddisfa il seguente sistema di equazioni
    $$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t), \quad \tilde{x}(t_0 = 0) = \tilde{x}_0$$
  - Un movimento "perturbato" $x(t)$ ottenuto applicando lo stesso ingresso "nominale" $\tilde{u}(t)$ al sistema posto in uno stato iniziale differente ("perturbato") $x_0 \neq \tilde{x}_0 \Rightarrow$ $x(t)$ soddisfa il seguente sistema di equazioni
    $$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\tilde{u}(t), \quad x(t_0 = 0) = x_0$$

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TC (2/5)

- La differenza fra i due diversi movimenti costituisce la perturbazione sullo stato del sistema:

$$\delta x(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t)$$

- L'evoluzione temporale della perturbazione sullo stato $\delta x(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$\delta \dot{x}(t) = \frac{d\left(\delta x(t)\right)}{dt} = \frac{d\left(x(t) - \tilde{x}(t)\right)}{dt} = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) =$$

$$= Ax(t) + \cancel{B\tilde{u}(t)} - \left[A\tilde{x}(t) + \cancel{B\tilde{u}(t)}\right] =$$

$$= Ax(t) - A\tilde{x}(t) = A\left(x(t) - \tilde{x}(t)\right) = A\delta x(t)$$

con condizione iniziale

$$\delta x(t_0 = 0) = x(t_0 = 0) - \tilde{x}(t_0 = 0) = x_0 - \tilde{x}_0 = \delta x_0 \neq 0$$

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TC (3/5)

- La soluzione $\delta x(t)$ dell'equazione differenziale

  $$\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t), \quad \delta x(t_0=0) = x_0 - \tilde{x}_0 = \delta x_0$$

  è data da

  $$\boxed{\delta x(t) = e^{At}\delta x_0, \quad \forall t \geq 0}$$

- Nel caso di un sistema dinamico LTI TC, l'evoluzione temporale della perturbazione sullo stato $\delta x(t)$ non dipende quindi dallo stato iniziale "nominale" $\tilde{x}_0$ o dall'ingresso "nominale" $\tilde{u}(t)$, cioè non dipende dal particolare movimento "nominale" $\tilde{x}(t)$ considerato $\Rightarrow$ nel caso dei sistemi dinamici LTI TC, la proprietà di stabilità riguarda l'intero sistema e non i singoli movimenti, come avviene invece nel caso dei sistemi dinamici non lineari

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TC (4/5)

- Come conseguenza dei risultati dell'analisi modale, l'evoluzione temporale della perturbazione sullo stato

$$\delta x(t) = e^{At}\delta x_0, \quad \forall t \geq 0$$

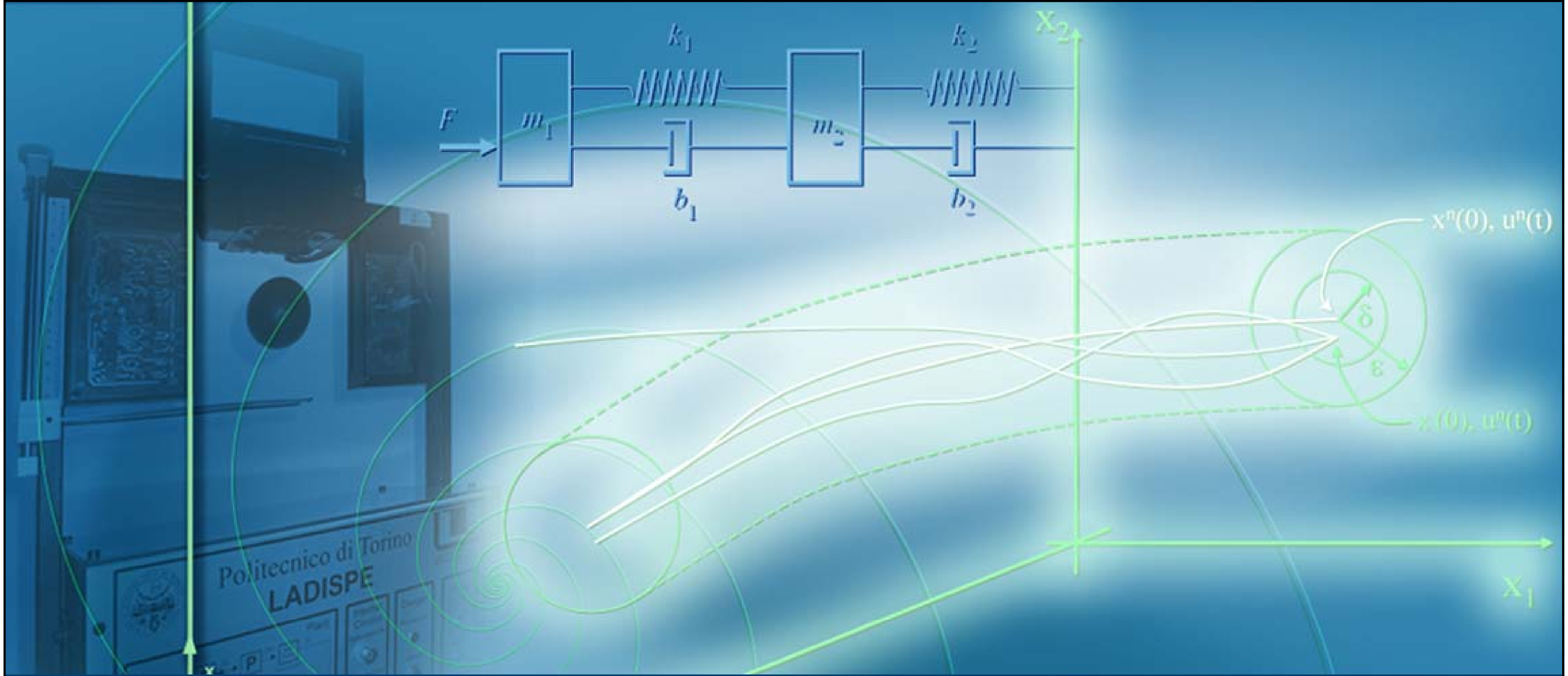
è combinazione lineare dei modi propri del sistema, che in generale sono del tipo

$$m_{i,\mu_i'}(t) = t^{\mu_i'-1} e^{\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i)t} \cos\left(\mathbb{I}\mathrm{m}(\lambda_i)t + \varphi_i\right), \quad 1 \leq \mu_i' \leq \mu_i$$

- L'evoluzione temporale dei modi propri dipende dagli autovalori λ_i della matrice di stato A. In particolare, i modi propri di un sistema dinamico LTI TC sono:
  - Esponenzialmente convergenti se $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i) < 0$
  - Limitati se $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i) = 0$ e $\mu_i' = 1$
  - Polinomialmente divergenti se $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i) = 0$ e $\mu_i' > 1$
  - Esponenzialmente divergenti se $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i) > 0$

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TC (5/5)

- La perturbazione $\delta x(t)$ rimane limitata nel tempo e tende a zero asintoticamente ($t \to \infty$) se e soltanto se tutti i modi propri sono convergenti
  $\Rightarrow$ il sistema dinamico LTI è asintoticamente stabile
- La perturbazione $\delta x(t)$ rimane limitata nel tempo ma non tende a zero asintoticamente se e soltanto se nessun modo proprio è divergente ed almeno un modo proprio è limitato
  $\Rightarrow$ il sistema dinamico LTI è semplicemente stabile
- La perturbazione $\delta x(t)$ non è limitata nel tempo e anzi diverge se e soltanto se almeno un modo proprio è divergente
  $\Rightarrow$ il sistema dinamico LTI è instabile
- Si possono così formulare alcuni criteri di stabilità



Stabilità interna di sistemi dinamici LTI

Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI TC

Criterio di asintotica stabilità per sistema LTI TC

- Dato un sistema dinamico LTI a tempo continuo, condizione necessaria e sufficiente affinché risulti **asintoticamente stabile** è che

$$\boxed{\forall i: \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\lambda_i(A)\right) < 0}$$

- In tal caso la perturbazione sullo stato $\delta x(t)$, oltre a rimanere limitata, tende a zero asintoticamente per qualsiasi perturbazione iniziale $\delta x(t_0)$
$\Rightarrow$ il sistema è globalmente asintoticamente stabile
- Se l'ingresso nominale è costante e pari ad $\bar{u}$, esiste un unico stato di equilibrio pari a $\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$ (infatti la matrice A è invertibile, poiché $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$) ed è globalmente asintoticamente stabile

Criterio di instabilità per sistema LTI TC

- Dato un sistema dinamico LTI a tempo continuo, condizione (soltanto) sufficiente affinché risulti **instabile** è che

$$\boxed{\exists i: \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\big(\lambda_i(A)\big) > 0}$$

Criterio di semplice stabilità per sistema LTI TC

- Dato un sistema dinamico LTI a tempo continuo, condizione (soltanto) sufficiente affinché risulti **semplicemente stabile** è che

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall i : \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\lambda_i(A)\right) \leq 0 \\ \exists k : \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\lambda_k(A)\right) = 0 \\ \forall k : \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\lambda_k(A)\right) = 0 \Rightarrow \mu_k = 1 \end{array}}$$

Caso critico per lo studio della stabilità (1/3)

- Dato un sistema dinamico LTI a tempo continuo tale che

$$\boxed{\begin{aligned}&\forall i : \mathbb{R}\mathrm{e}\big(\lambda_i(A)\big) \le 0\\ &\exists k : \mathbb{R}\mathrm{e}\big(\lambda_k(A)\big) = 0, \ \ \mu_k > 1\end{aligned}}$$

esso può risultare **semplicemente stabile** oppure **instabile**, a seconda che modi polinomialmente divergenti siano effettivamente presenti nella evoluzione temporale della perturbazione $\delta x(t)$

Caso critico per lo studio della stabilità (2/3)

- Esempio #1: si consideri il sistema dinamico LTI TC avente matrice di stato $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, caratterizzato dall'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità $\mu = 2$.
La perturbazione sullo stato $\delta x(t)$ è soluzione della equazione differenziale

$$\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta\dot{x}_1(t) = 0 \\ \delta\dot{x}_2(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x_1(t) = \delta x_1(0) \\ \delta x_2(t) = \delta x_2(0) \end{cases}$$

$\delta x(t)$ è costante e quindi è limitata ma non tende a zero asintoticamente
$\Rightarrow$ il sistema risulta semplicemente stabile

Caso critico per lo studio della stabilità (3/3)

- Esempio #2: si consideri il sistema dinamico LTI TC avente matrice di stato $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, caratterizzato ancora dall'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità $\mu = 2$. La perturbazione sullo stato $\delta x(t)$ è soluzione della equazione differenziale

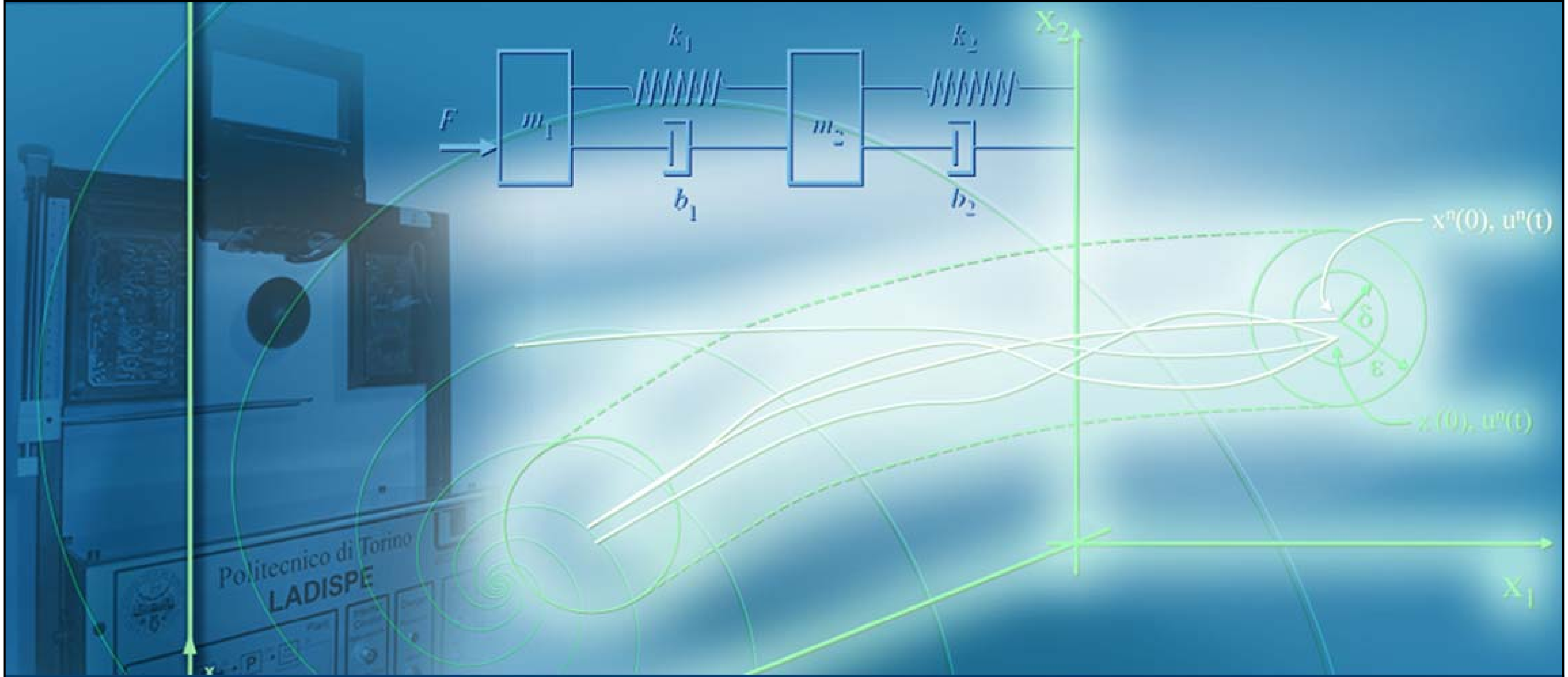
$$\delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta x_1(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1(t) = 0 \\ \delta \dot{x}_2(t) = \delta x_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x_1(t) = \delta x_1(0) \\ \delta x_2(t) = t\delta x_1(0) + \delta x_2(0) \end{cases}$$

$\delta x(t)$ diverge polinomialmente, se $\delta x_1(0) \neq 0$
$\Rightarrow$ il sistema risulta instabile

Prospetto riassuntivo per sistemi dinamici LTI TC

Autovalori $\lambda_i(A)$ del sistema	Modi propri del sistema	Proprietà di stabilità del sistema
$\forall i : \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) < 0$	Convergono tutti esponenzialmente	**Asintotica stabilità**
$\exists i : \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) > 0$	Almeno uno diverge esponenzialmente	**Instabilità**
$\forall i : \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) \leq 0$ $\exists k : \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_k(A)) = 0$ $\forall k : \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_k(A)) = 0$ $\Rightarrow \mu_k = 1$	Oltre a quelli che convergono esponenzialmente, è presente almeno uno limitato	**Semplice stabilità**
$\forall i : \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) \leq 0$ $\exists k : \mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_k(A)) = 0,$ $\mu_k > 1$	Oltre a quelli che convergono, almeno uno diverge polinomialmente oppure è limitato	**Instabilità** oppure **Semplice stabilità**



Stabilità interna di sistemi dinamici LTI

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TD

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TD (1/5)

- Dato un sistema dinamico, a dimensione finita, MIMO, a tempo discreto, lineare e stazionario (LTI), descritto dall'equazione di stato $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, se ne considerino due diverse evoluzioni temporali:
  - Un movimento "nominale" $\tilde{x}(k)$ ottenuto applicando un ingresso "nominale" $\tilde{u}(k)$ al sistema posto in uno stato iniziale "nominale" $\tilde{x}(k_0 = 0) = \tilde{x}_0 \Rightarrow$ $\tilde{x}(k)$ soddisfa il seguente sistema di equazioni
  $$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + B\tilde{u}(k), \quad \tilde{x}(k_0 = 0) = \tilde{x}_0$$
  - Un movimento "perturbato" $x(k)$ ottenuto applicando lo stesso ingresso "nominale" $\tilde{u}(k)$ al sistema posto in uno stato iniziale differente ("perturbato") $x_0 \neq \tilde{x}_0 \Rightarrow$ $x(k)$ soddisfa il seguente sistema di equazioni
  $$x(k+1) = Ax(k) + B\tilde{u}(k), \quad x(k_0 = 0) = x_0$$

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TD (2/5)

- La differenza fra i due diversi movimenti costituisce la perturbazione sullo stato del sistema:
  $$\delta x(k) = x(k) - \tilde{x}(k) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x(k) = \tilde{x}(k) + \delta x(k)$$
- L'evoluzione temporale della perturbazione sullo stato $\delta x(k)$ è soluzione dell'equazione alle differenze
  $$\begin{aligned}\delta x(k+1) &= x(k+1) - \tilde{x}(k+1) = \\ &= Ax(k) + \cancel{B\tilde{u}(k)} - \left[A\tilde{x}(k) + \cancel{B\tilde{u}(k)}\right] = \\ &= Ax(k) - A\tilde{x}(k) = A\left(x(k) - \tilde{x}(k)\right) = A\delta x(k)\end{aligned}$$
  con condizione iniziale
  $$\delta x(k_0 = 0) = x(k_0 = 0) - \tilde{x}(k_0 = 0) = x_0 - \tilde{x}_0 = \delta x_0 \neq 0$$

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TD (3/5)

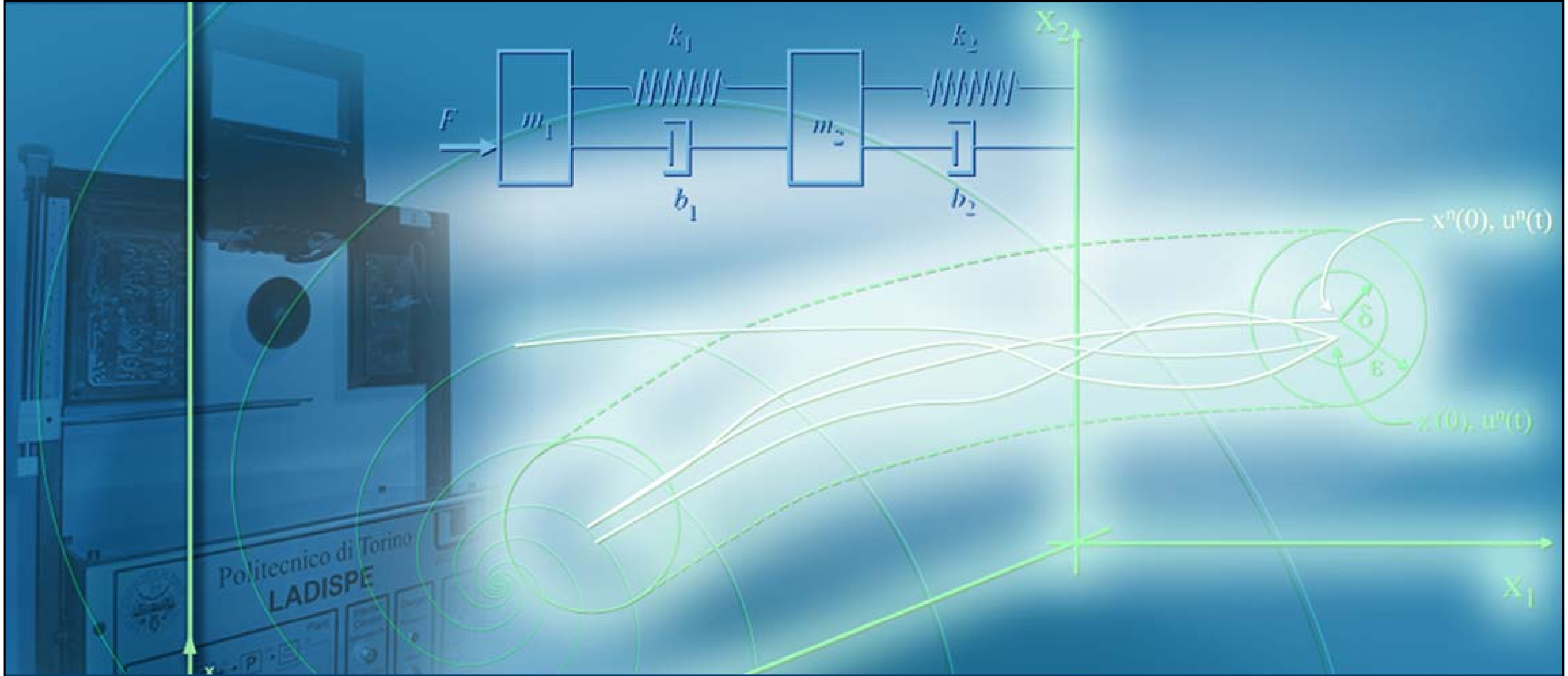
- La soluzione $\delta x(k)$ dell'equazione alle differenze
  $$\delta x(k+1) = A\delta x(k), \quad \delta x(k_0 = 0) = x_0 - \tilde{x}_0 = \delta x_0$$
  è data da
  $$\boxed{\delta x(k) = A^k \delta x_0, \quad \forall k \geq 0}$$
- Nel caso di un sistema dinamico LTI TD, l'evoluzione temporale della perturbazione sullo stato $\delta x(k)$ non dipende quindi dallo stato iniziale "nominale" $\tilde{x}_0$ o dall'ingresso "nominale" $\tilde{u}(k)$, cioè non dipende dal particolare movimento "nominale" $\tilde{x}(k)$ considerato $\Rightarrow$ nel caso dei sistemi dinamici LTI TD, la proprietà di stabilità riguarda l'intero sistema e non i singoli movimenti, come avviene invece nel caso dei sistemi dinamici non lineari

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TD (4/5)

- Come conseguenza dei risultati dell'analisi modale, l'evoluzione temporale della perturbazione sullo stato
$$\delta x(k) = A^k \delta x_0, \quad \forall k \geq 0$$
è combinazione lineare dei modi propri del sistema, che in generale sono del tipo
$$m_{i,\mu_i'}(k) = k^{\mu_i'-1} |\lambda_i|^k \cos\left(\arg(\lambda_i) k + \varphi_i\right), \quad 1 \leq \mu_i' \leq \mu_i$$
- L'evoluzione temporale dei modi propri dipende dagli autovalori λ_i della matrice di stato A. In particolare, i modi propri di un sistema dinamico LTI TD sono:
  - Geometricamente convergenti se $|\lambda_i| < 1$
  - Limitati se $|\lambda_i| = 1$ e $\mu_i' = 1$
  - Polinomialmente divergenti se $|\lambda_i| = 1$ e $\mu_i' > 1$
  - Geometricamente divergenti se $|\lambda_i| > 1$

Stabilità interna di sistemi dinamici LTI TD (5/5)

- La perturbazione $\delta x(k)$ rimane limitata nel tempo e tende a zero asintoticamente ($k \rightarrow \infty$) se e soltanto se tutti i modi propri sono convergenti
  $\Rightarrow$ il sistema dinamico LTI è asintoticamente stabile
- La perturbazione $\delta x(k)$ rimane limitata nel tempo ma non tende a zero asintoticamente se e soltanto se nessun modo proprio è divergente ed almeno un modo proprio è limitato
  $\Rightarrow$ il sistema dinamico LTI è semplicemente stabile
- La perturbazione $\delta x(k)$ non è limitata nel tempo e anzi diverge se e soltanto se almeno un modo proprio è divergente
  $\Rightarrow$ il sistema dinamico LTI è instabile
- Si possono così formulare alcuni criteri di stabilità



Stabilità interna di sistemi dinamici LTI

Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI TD

Criterio di asintotica stabilità per sistema LTI TD

- Dato un sistema dinamico LTI a tempo discreto, condizione necessaria e sufficiente affinché risulti **asintoticamente stabile** è che

$$\boxed{\forall i: \quad |\lambda_i(A)| < 1}$$

- In tal caso la perturbazione sullo stato $\delta x(k)$, oltre a rimanere limitata, tende a zero asintoticamente per qualsiasi perturbazione iniziale $\delta x(k_0)$
$\Rightarrow$ il sistema è globalmente asintoticamente stabile
- Se l'ingresso nominale è costante e pari ad $\bar{u}$, esiste un unico stato di equilibrio $\bar{x} = (I - A)^{-1} B\bar{u}$ (infatti la matrice $I - A$ è invertibile: $\det(I - A) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i) \neq 0$) ed è globalmente asintoticamente stabile

Criterio di instabilità per sistema LTI TD

- Dato un sistema dinamico LTI a tempo discreto, condizione (soltanto) sufficiente affinché risulti **instabile** è che

$$\boxed{\exists i: \quad |\lambda_i(A)| > 1}$$

Criterio di semplice stabilità per sistema LTI TD

- Dato un sistema dinamico LTI a tempo discreto, condizione (soltanto) sufficiente affinché risulti **semplicemente stabile** è che

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall i : \left|\lambda_i(A)\right| \le 1 \\ &\exists k : \left|\lambda_k(A)\right| = 1 \\ &\forall k : \left|\lambda_k(A)\right| = 1 \Rightarrow \mu_k = 1 \end{aligned}}$$

Caso critico per lo studio della stabilità (1/3)

- Dato un sistema dinamico LTI a tempo discreto tale che

$$\begin{array}{l} \forall i : |\lambda_i(A)| \le 1 \\ \exists k : |\lambda_k(A)| = 1,\ \ \mu_k > 1 \end{array}$$

esso può risultare **semplicemente stabile** oppure **instabile**, a seconda che modi polinomialmente divergenti siano effettivamente presenti nella evoluzione temporale della perturbazione $\delta x(k)$

Caso critico per lo studio della stabilità (2/3)

- Esempio #1: si consideri il sistema dinamico LTI TD avente matrice di stato $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, caratterizzato dall'autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità $\mu = 2$.
La perturbazione sullo stato $\delta x(k)$ è soluzione della equazione alle differenze

$$\delta x(k+1) = A\delta x(k) = \delta x(k) = \begin{bmatrix} \delta x_1(k) \\ \delta x_2(k) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \delta x_1(k+1) = \delta x_1(k) \\ \delta x_2(k+1) = \delta x_2(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x_1(k) = \delta x_1(0) \\ \delta x_2(k) = \delta x_2(0) \end{cases}$$

$\delta x(k)$ è costante e quindi è limitata ma non tende a zero asintoticamente
$\Rightarrow$ il sistema risulta semplicemente stabile

Caso critico per lo studio della stabilità (3/3)

- Esempio #2: si consideri il sistema dinamico LTI TD avente matrice di stato $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, caratterizzato ancora dall'autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità $\mu = 2$. La perturbazione sullo stato $\delta x(k)$ è soluzione della equazione alle differenze

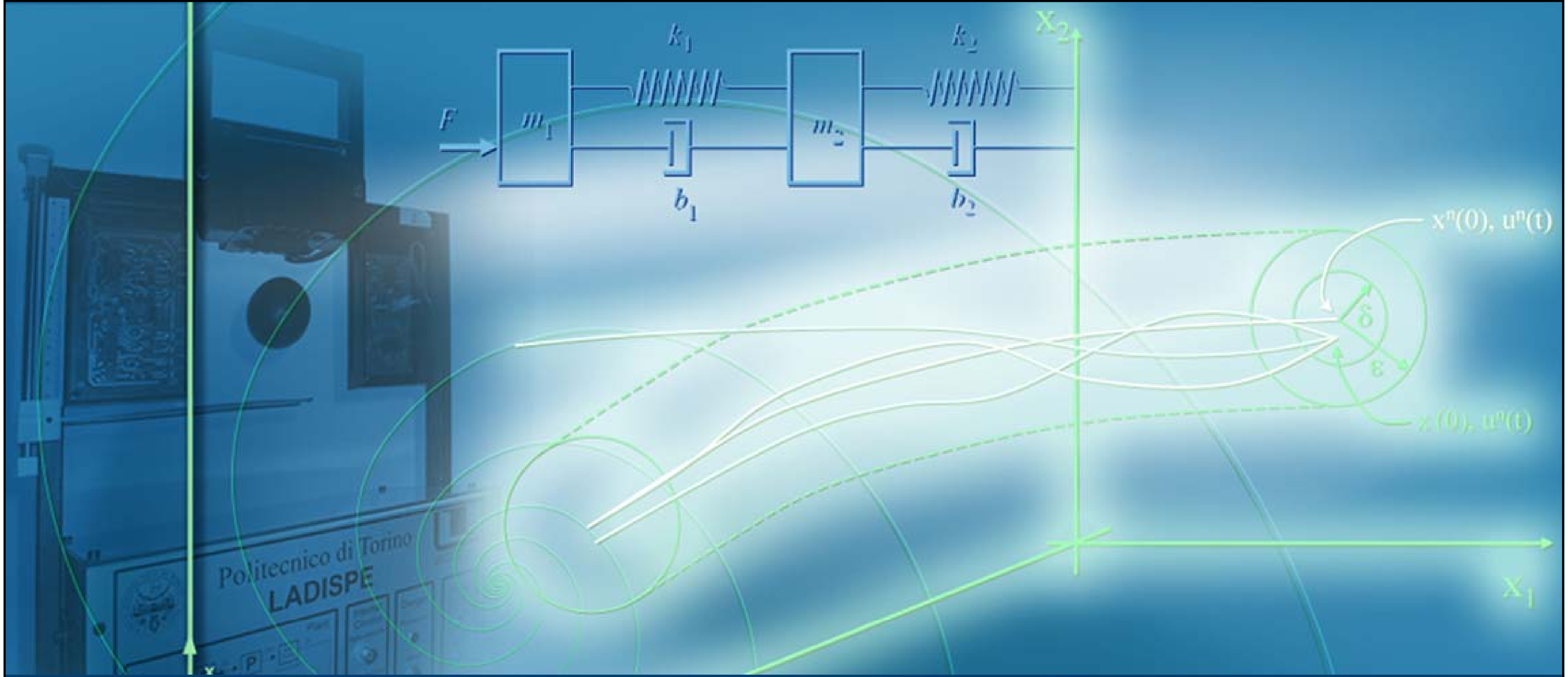
$$\delta x(k+1) = A\delta x(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(k) \\ \delta x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_1(k) \\ \delta x_1(k) + \delta x_2(k) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \delta x_1(k+1) = \delta x_1(k) \\ \delta x_2(k+1) = \delta x_1(k) + \delta x_2(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x_1(k) = \delta x_1(0) \\ \delta x_2(k) = k\delta x_1(0) + \delta x_2(0) \end{cases}$$

$\delta x(k)$ diverge polinomialmente, se $\delta x_1(0) \neq 0$
$\Rightarrow$ il sistema risulta instabile

Prospetto riassuntivo per sistemi dinamici LTI TD

Autovalori $\lambda_i(A)$ del sistema	Modi propri del sistema	Proprietà di stabilità del sistema
$\forall i : \lvert\lambda_i(A)\rvert < 1$	Convergono tutti geometricamente	**Asintotica stabilità**
$\exists i : \lvert\lambda_i(A)\rvert > 1$	Almeno uno diverge geometricamente	**Instabilità**
$\forall i : \lvert\lambda_i(A)\rvert \le 1$ $\exists k : \lvert\lambda_k(A)\rvert = 1$ $\forall k : \lvert\lambda_k(A)\rvert = 1$ $\Rightarrow \mu_k = 1$	Oltre a quelli che convergono geometricamente, è presente almeno uno limitato	**Semplice stabilità**
$\forall i : \lvert\lambda_i(A)\rvert \le 1$ $\exists k : \lvert\lambda_k(A)\rvert = 1,$ $\mu_k > 1$	Oltre a quelli che convergono, almeno uno diverge polinomialmente oppure è limitato	**Instabilità** oppure **Semplice stabilità**



Stabilità interna di sistemi dinamici LTI

Esempi di analisi della stabilità interna

Esempio #1 di analisi della stabilità

- Dato il sistema dinamico LTI TC descritto dal modello
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
analizzarne la proprietà di stabilità interna, sapendo che gli autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A sono
$$\left\{ \lambda_i(A) \right\} = \left\{ -2, -0.4, -0.2, -0.1 \right\}$$
- Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo continuo, occorre considerare la parte reale degli autovalori
$$\left\{ \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\lambda_i(A)\right) \right\} = \left\{ -2, -0.4, -0.2, -0.1 \right\}$$
Tutti gli autovalori hanno $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) < 0$
$\Rightarrow$ il sistema è globalmente asintoticamente stabile

Esempio #2 di analisi della stabilità

- Dato il sistema dinamico LTI TC descritto dal modello
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
analizzarne la proprietà di stabilità interna, sapendo che gli autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A sono
$$\{\lambda_i(A)\} = \{-1, -0.5, 0, 0.5\}$$
- Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo continuo, occorre considerare la parte reale degli autovalori
$$\{\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A))\} = \{-1, -0.5, 0, 0.5\}$$
L'autovalore $\lambda_4 = 0.5$ ha $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_4) = 0.5 > 0$
$\Rightarrow$ il sistema è instabile

Esempio #3 di analisi della stabilità

- Dato il sistema dinamico LTI TC descritto dal modello

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

analizzarne la proprietà di stabilità interna, sapendo che gli autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A sono

$$\left\{ \lambda_i(A) \right\} = \left\{ -0.5 \pm 0.1j, 0.4 \pm 0.2j \right\}$$

- Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo continuo, occorre considerare la parte reale degli autovalori

$$\left\{ \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\lambda_i(A)\right) \right\} = \left\{ -0.5, -0.5, 0.4, 0.4 \right\}$$

La coppia $\lambda_{3,4} = 0.4 \pm 0.2j$ ha $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_{3,4}) = 0.4 > 0$
$\Rightarrow$ il sistema è instabile

Esempio #4 di analisi della stabilità

- Dato il sistema dinamico LTI TC descritto dal modello
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
analizzarne la proprietà di stabilità interna, sapendo che gli autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A sono
$$\left\{ \lambda_i(A) \right\} = \left\{ -10, -5, -0.1, 0 \right\}$$
- Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo continuo, occorre considerare la parte reale degli autovalori
$$\left\{ \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\lambda_i(A)\right) \right\} = \left\{ -10, -5, -0.1, 0 \right\}$$
Tutti gli autovalori hanno $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) \leq 0$ ed un solo autovalore $\lambda_4 = 0$ ha $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_4) = 0$
$\Rightarrow$ il sistema è semplicemente stabile

Esempio #5 di analisi della stabilità

- Dato il sistema dinamico LTI TC descritto dal modello

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

analizzarne la proprietà di stabilità interna, sapendo che gli autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A sono

$$\{\, \lambda_i(A) \,\} = \{\, -1, \pm j, 0 \,\}$$

- Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo continuo, occorre considerare la parte reale degli autovalori

$$\{\, \mathbb{R}\mathrm{e}\big(\lambda_i(A)\big) \,\} = \{\, -1, 0, 0, 0 \,\}$$

Tutti gli autovalori hanno $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) \leq 0$ e tutti quelli con $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_k(A)) = 0$ sono distinti, cioè hanno $\mu_k = 1$

$\Rightarrow$ il sistema è semplicemente stabile

Esempio #6 di analisi della stabilità

- Dato il sistema dinamico LTI TD descritto dal modello
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$
analizzarne la proprietà di stabilità interna, sapendo che gli autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A sono
$$\{\lambda_i(A)\} = \{-2, -0.4, -0.2, -0.1\}$$
- Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo discreto, occorre considerare il modulo degli autovalori
$$\{|\lambda_i(A)|\} = \{2, 0.4, 0.2, 0.1\}$$
L'autovalore $\lambda_1 = -2$ ha $|\lambda_1| = 2 > 1$
$\Rightarrow$ il sistema è instabile

Esempio #7 di analisi della stabilità

- Dato il sistema dinamico LTI TD descritto dal modello
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$
analizzarne la proprietà di stabilità interna, sapendo che gli autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A sono
$$\{\lambda_i(A)\} = \{-1, -0.5, 0, 0.5\}$$
- Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo discreto, occorre considerare il modulo degli autovalori
$$\{|\lambda_i(A)|\} = \{1, 0.5, 0, 0.5\}$$
Tutti gli autovalori hanno $|\lambda_i(A)| \leq 1$ ed un solo autovalore $\lambda_1 = -1$ ha $|\lambda_1| = 1$
$\Rightarrow$ il sistema è semplicemente stabile

Esempio #8 di analisi della stabilità

- Dato il sistema dinamico LTI TD descritto dal modello

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

analizzarne la proprietà di stabilità interna, sapendo che gli autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A sono

$$\{\,\lambda_i(A)\,\} = \{\,-0.5 \pm 0.1j,\, 0.4 \pm 0.2j\,\}$$

- Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo discreto, occorre considerare il modulo degli autovalori

$$\{|\lambda_i(A)|\} = \left\{\sqrt{0.5^2+0.1^2} = \sqrt{0.26}, \sqrt{0.26}, \sqrt{0.4^2+0.2^2} = \sqrt{0.2}, \sqrt{0.2}\right\}$$

Tutti gli autovalori hanno $|\lambda_i(A)| < 1$
$\Rightarrow$ il sistema è globalmente asintoticamente stabile

Esempio #9 di analisi della stabilità

- Dato il sistema dinamico LTI TD descritto dal modello
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$
analizzarne la proprietà di stabilità interna, sapendo che gli autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A sono
$$\{\,\lambda_i(A)\,\} = \{\,-10, -5, -0.1, 0\,\}$$
- Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo discreto, occorre considerare il modulo degli autovalori
$$\{\,|\lambda_i(A)|\,\} = \{\,10, 5, 0.1, 0\,\}$$
Gli autovalori $\lambda_1 = -10$ e $\lambda_2 = -5$ hanno $|\lambda_1| = 10 > 1$ e $|\lambda_2| = 5 > 1$
$\Rightarrow$ il sistema è instabile

Esempio #10 di analisi della stabilità

- Dato il sistema dinamico LTI TD descritto dal modello
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$
analizzarne la proprietà di stabilità interna, sapendo che gli autovalori $\lambda_i(A)$ della matrice di stato A sono
$$\{\, \lambda_i(A) \,\} = \{\, -1, \pm j, 0 \,\}$$
- Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo discreto, occorre considerare il modulo degli autovalori
$$\{\, |\lambda_i(A)| \,\} = \{\, 1, 1, 1, 0 \,\}$$
Tutti gli autovalori hanno $|\lambda_i(A)| \le 1$ e tutti quelli con $|\lambda_k(A)| = 1$ sono distinti, cioè hanno $\mu_k = 1$
$\Rightarrow$ il sistema è semplicemente stabile

Esempio #11 di analisi della stabilità (1/2)

- Dato il sistema dinamico LTI TC con matrice di stato

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{-0.2} & 0 \\ 0 & \boxed{-0.3} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

analizzarne la proprietà di stabilità interna

- Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo continuo, occorre considerare la parte reale degli autovalori
In questo caso, la matrice A è diagonale a blocchi $\Rightarrow$ gli autovalori $\lambda_i(A)$ sono gli autovalori dei blocchi quadrati posti sulla diagonale principale di A

Esempio #11 di analisi della stabilità (2/2)

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{-0.2} & 0 \\ 0 & \boxed{-0.3} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

A_1

$$\{\lambda_i(A)\} = \{\lambda_i(A_1)\} \bigcup \{-0.2, -0.3\}$$

$$p.c.(A_1) = \det(\lambda I - A_1) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$$

$$\Rightarrow \{\lambda_i(A)\} = \{-2, -2, -0.2, -0.3\}$$

$$\{\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A))\} = \{-2, -2, -0.2, -0.3\}$$

- Tutti gli autovalori hanno $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i(A)) < 0$
  $\Rightarrow$ il sistema è globalmente asintoticamente stabile

Esempio #12 di analisi della stabilità (1/2)

- Dato il sistema dinamico LTI TD con matrice di stato

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-0.2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-0.3} \end{bmatrix}$$

  analizzarne la proprietà di stabilità interna
- Per analizzare la stabilità interna dei sistemi dinamici LTI a tempo discreto, occorre considerare il modulo degli autovalori

  In questo caso, la matrice A è diagonale a blocchi $\Rightarrow$ gli autovalori $\lambda_i(A)$ sono gli autovalori dei blocchi quadrati posti sulla diagonale principale di A

Esempio #12 di analisi della stabilità (2/2)

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{-0.2} & 0 \\ 0 & \boxed{-0.3} \end{matrix} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\{\lambda_i(A)\} = \{\lambda_i(A_1)\} \bigcup \{-0.2, -0.3\}$$

$$p.c.(A_1) = \det(\lambda I - A_1) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$$

$$\Rightarrow \{\lambda_i(A)\} = \{-2, -2, -0.2, -0.3\}$$

$$\{|\lambda_i(A)|\} = \{2, 2, 0.2, 0.3\}$$

- Gli autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ hanno $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 2 > 1$ $\Rightarrow$ il sistema è instabile