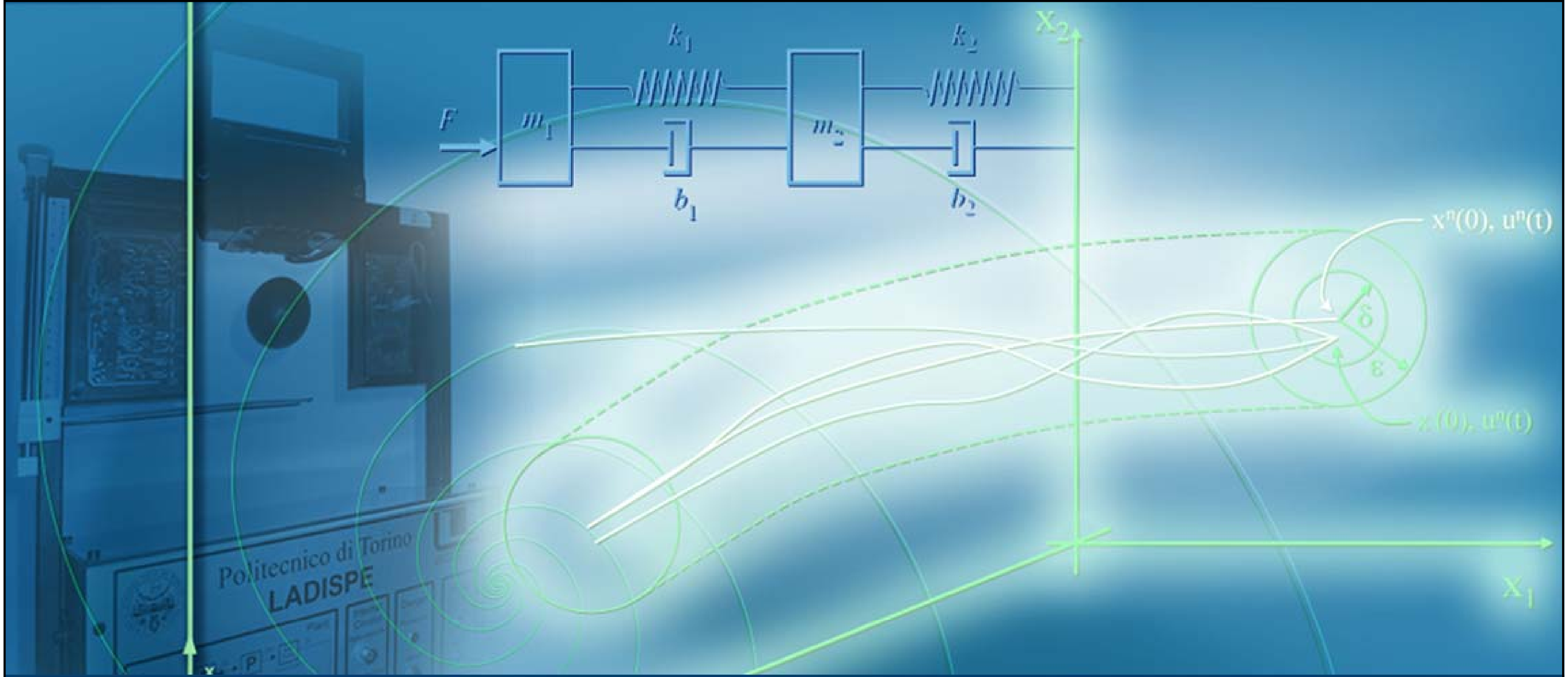
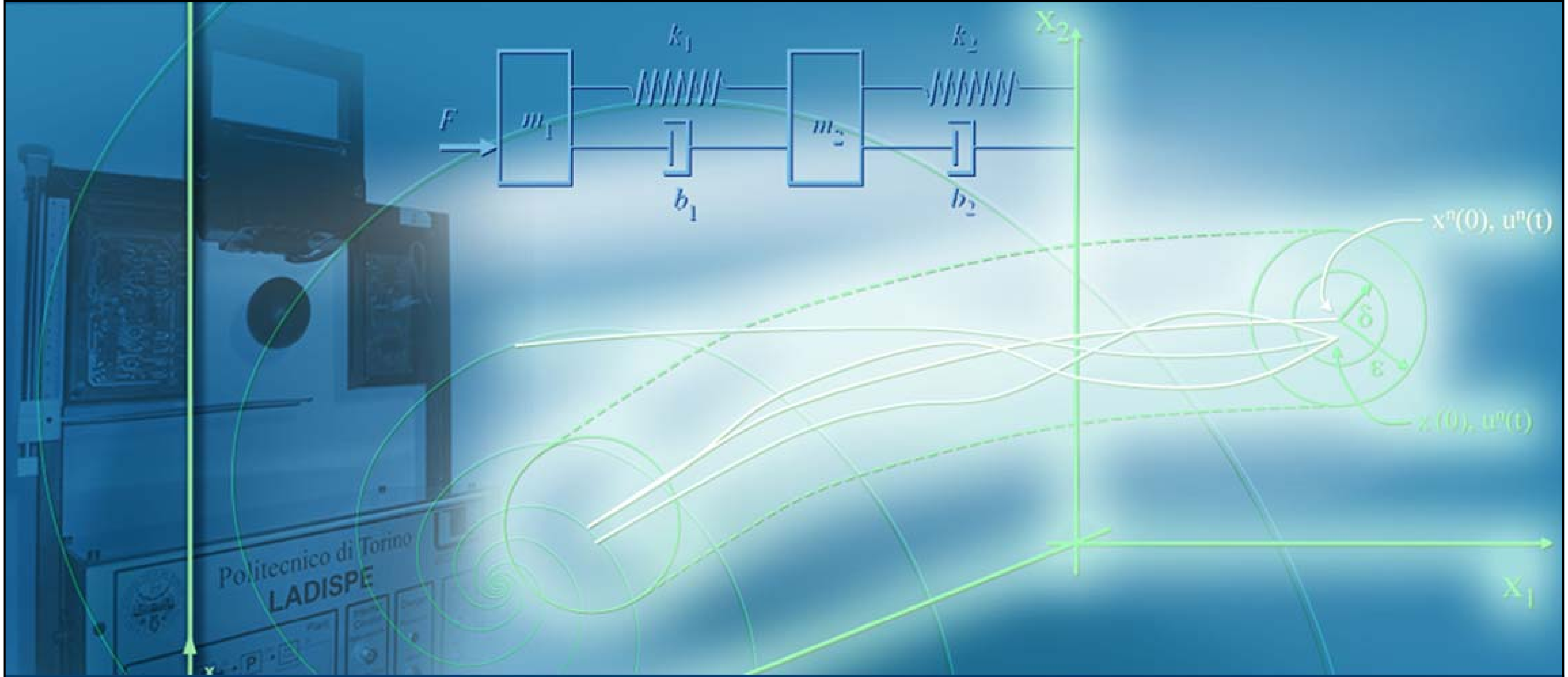


Stabilità esterna e analisi della risposta

Risposte di sistemi del 1° e 2° ordine

Risposte di sistemi del 1° e 2° ordine

- Introduzione
- Risposta al gradino di sistemi del 1° ordine
- Determinazione di un modello del 1° ordine
- Risposta al gradino di sistemi del 2° ordine
- Determinazione di un modello del 2° ordine



Risposte di sistemi del 1° e 2° ordine

Introduzione

Motivazioni (1/4)

- Lo studio della risposta al gradino di un sistema dinamico LTI esternamente stabile è importante per due motivi:
  - Permette di studiare il comportamento del sistema dato nella transizione tra una situazione di equilibrio ed un'altra
  - In alcuni casi, consente di determinare, a partire dal suo rilievo sperimentale, la funzione di trasferimento del sistema dinamico

Motivazioni (2/4)

- Il comportamento della risposta al gradino di sistemi dinamici LTI esternamente stabili sarà studiato solo nel caso TC
- Si farà quindi riferimento alla descrizione di tali sistemi mediante la funzione di trasferimento $H(s)$:

$$\boxed{H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}}$$

  - $H(s)$ funzione razionale fratta in s
  - $N_H(s)$ polinomio del numeratore
  - $D_H(s)$ polinomio del denominatore
  - $N_H(s)$ e $D_H(s)$ non hanno radici in comune

Motivazioni (3/4)

$$\boxed{H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}}$$

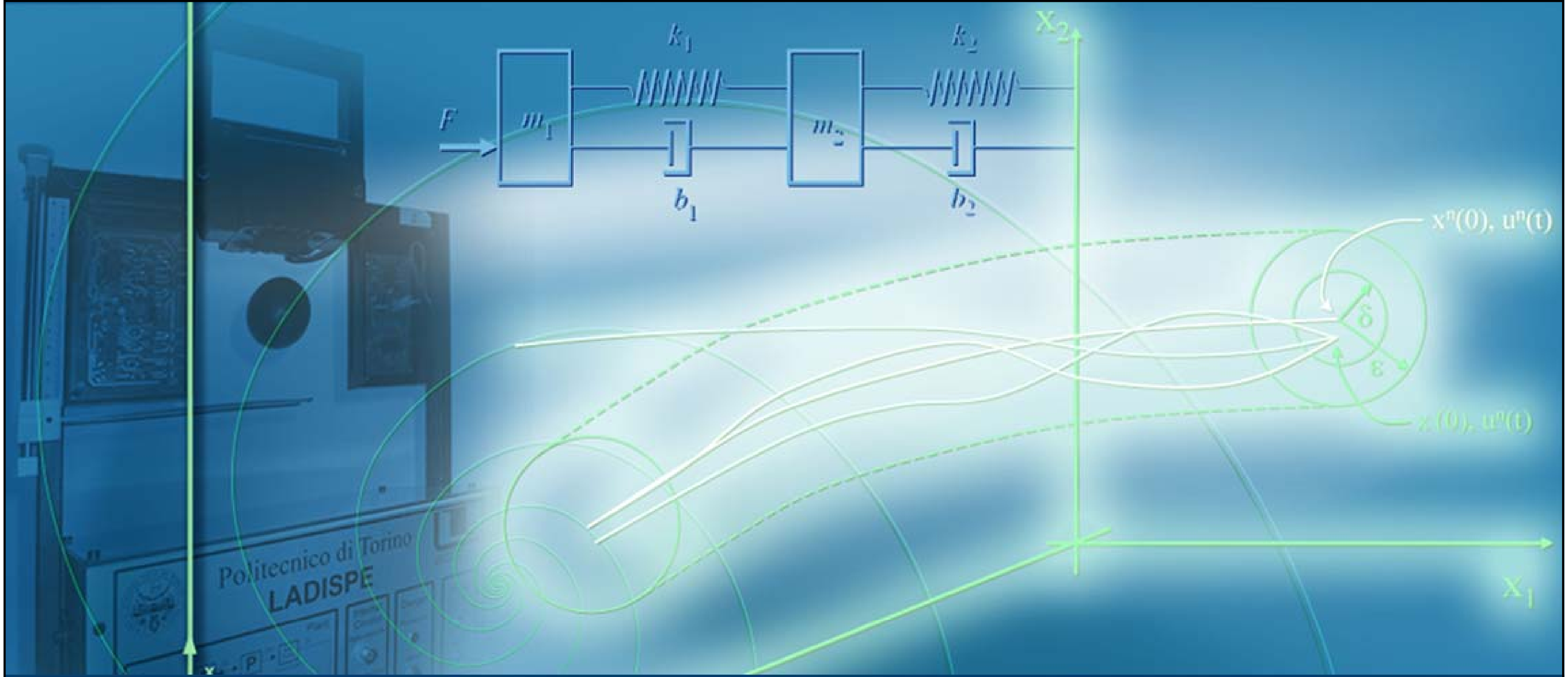
- In questo contesto, l'attenzione sarà concentrata sui
  - Sistemi del 1° ordine → $D_H(s)$ polinomio di 1° grado
  - Sistemi del 2° ordine → $D_H(s)$ polinomio di 2° grado

  i cui poli hanno parte reale strettamente negativa
- Inoltre, studieremo solo il caso di sistemi del 1° e del 2° ordine **elementari**

  → $N_H(s)$ di grado zero (polinomio costante)

Motivazioni (4/4)

- Nei due casi considerati, si procederà nello studio in base ai seguenti punti:
  - Calcolo della risposta al gradino
  - Tracciamento della risposta al gradino
  - Definizione dei parametri caratteristici della risposta al gradino



Risposte di sistemi del 1° e 2° ordine

Risposta al gradino di sistemi del 1° ordine

Funzione di trasferimento

- La funzione di trasferimento di un sistema del primo ordine elementare può essere espressa come:

$$H(s) = \frac{K^*}{s-p} \rightarrow \begin{cases} K^* \rightarrow \text{ guadagno} \\ p \rightarrow \text{ polo} \end{cases}$$

- Ponendo:

$$\tau = \left|\frac{1}{p}\right|, K = -\frac{K^*}{p}$$

- Si ottiene la forma:

$$H(s) = \frac{K}{1+\tau s}$$

Risposta al gradino: espressione analitica

- Se al sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{K}{1+\tau s}$$

viene applicato un ingresso $u(t)$ a gradino di ampiezza $\bar{u}$:

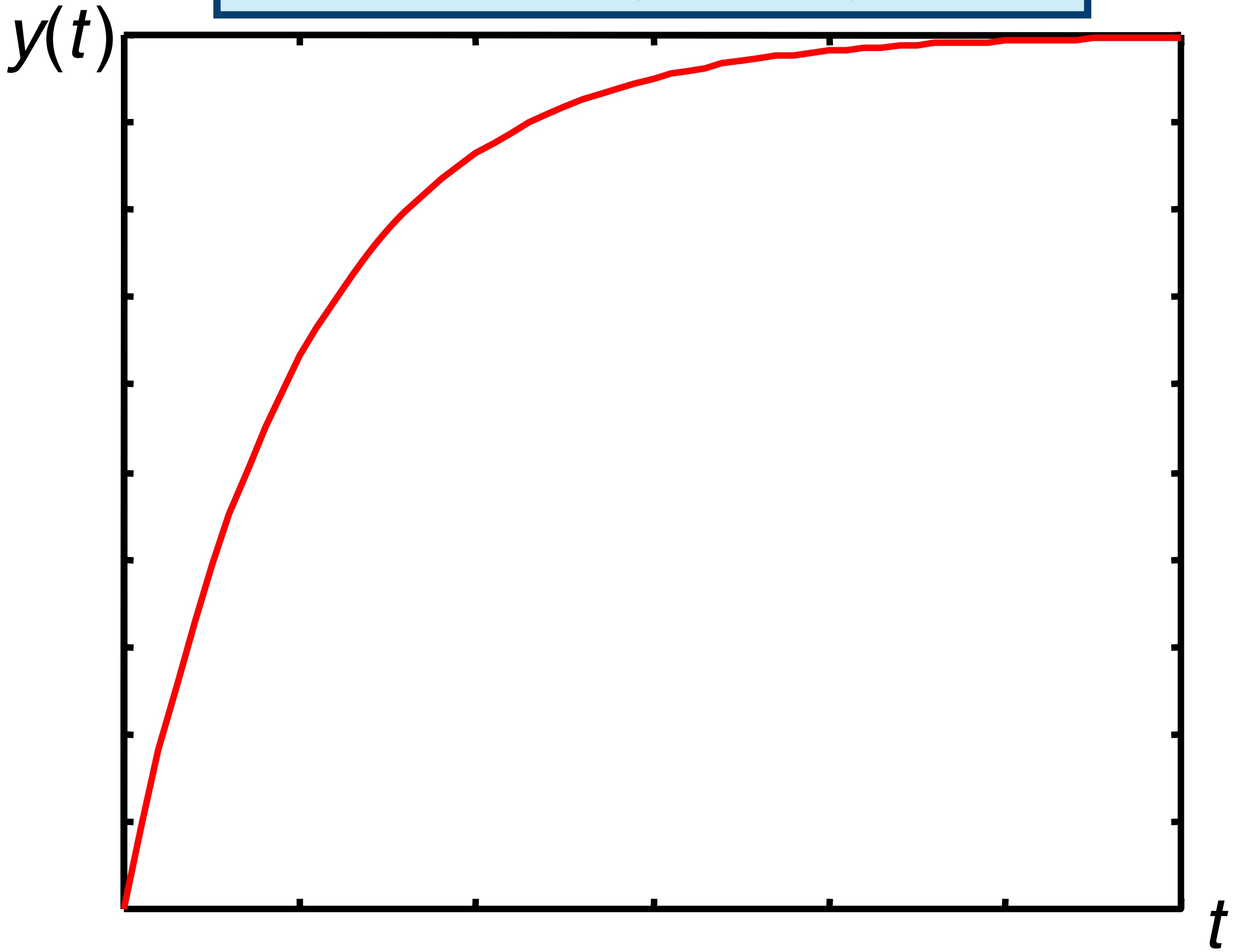
$$u(t) = \bar{u}\,\varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{\bar{u}}{s}$$

si ottiene la risposta:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{K}{1+\tau s}\frac{\bar{u}}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \bar{u}\,K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), t \geq 0$$

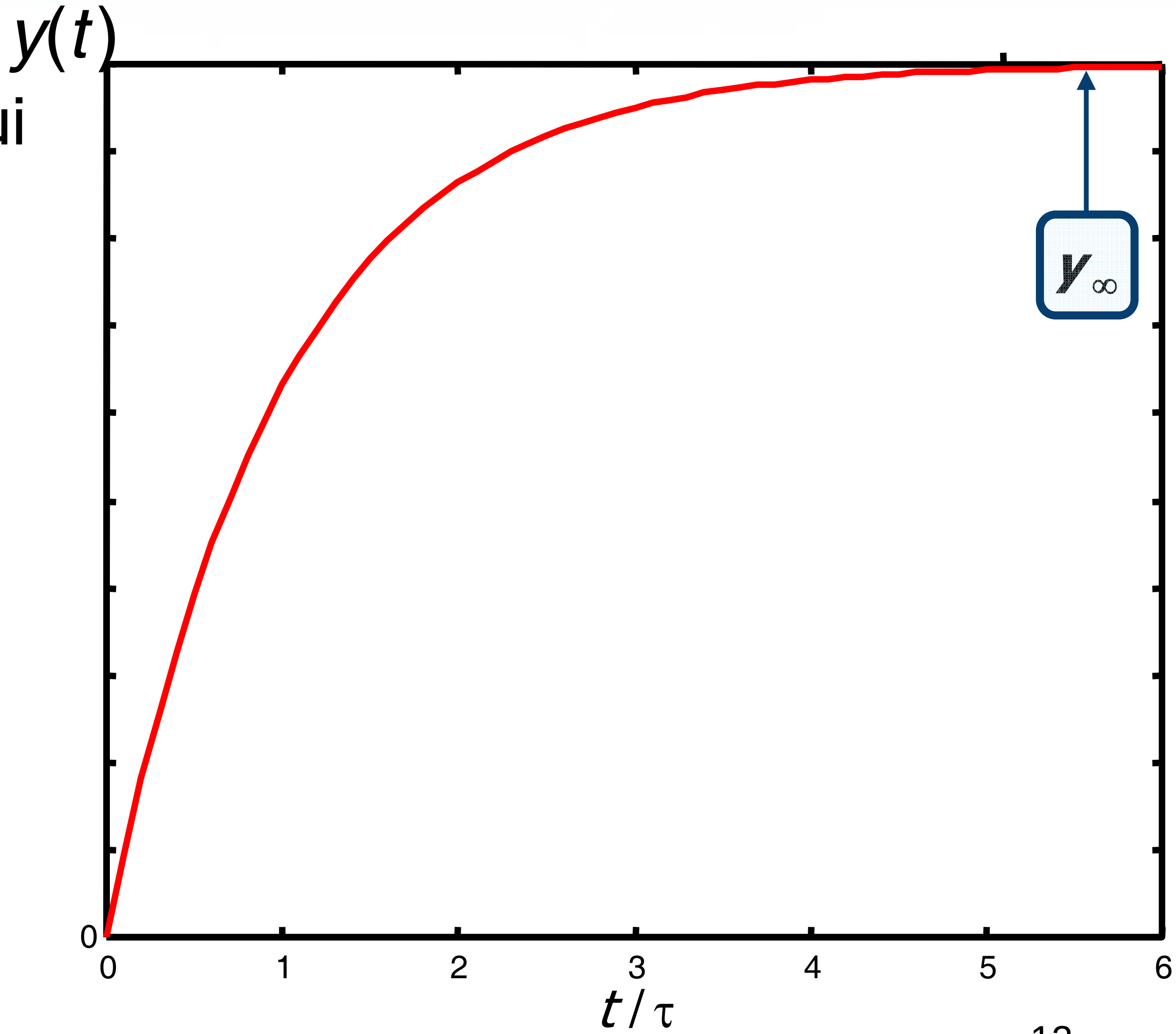
Risposta al gradino: andamento grafico

$$y(t) = \bar{u} \cdot K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), t \geq 0$$



Valore a regime

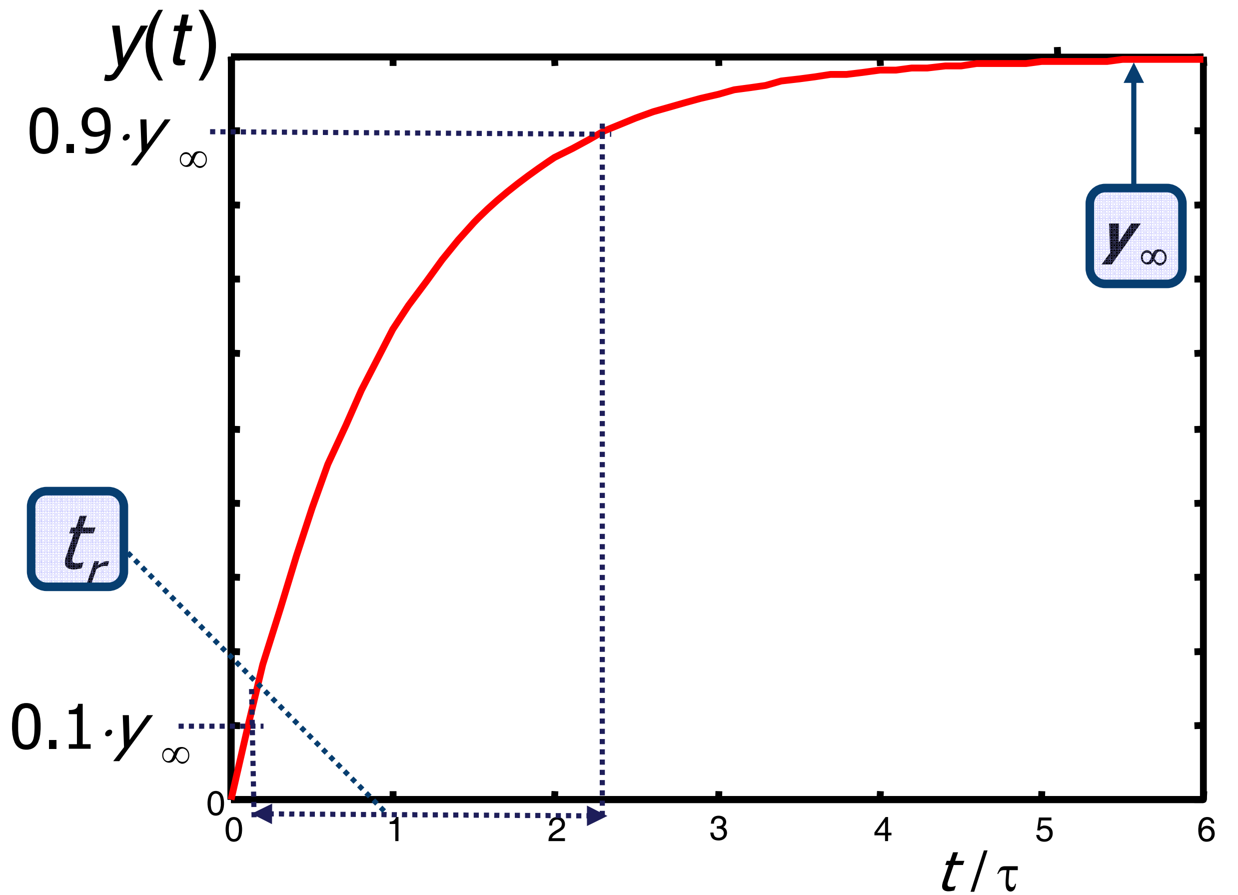
- **Valore a regime**
  $\boldsymbol{y}_\infty$ è il valore a cui tende la risposta $y(t)$ per $t \to \infty$



$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) =$$
$$= \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) =$$
$$= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{K}{1+\tau s}\frac{\bar{u}}{s} =$$
$$= K \cdot \bar{u}$$

Tempo di salita 10% ÷ 90%

- **Tempo di salita 10% ÷ 90% t_r** è il tempo richiesto perché la risposta passi, per la prima volta dal 10% al 90% del valore di regime $y = y_\infty$



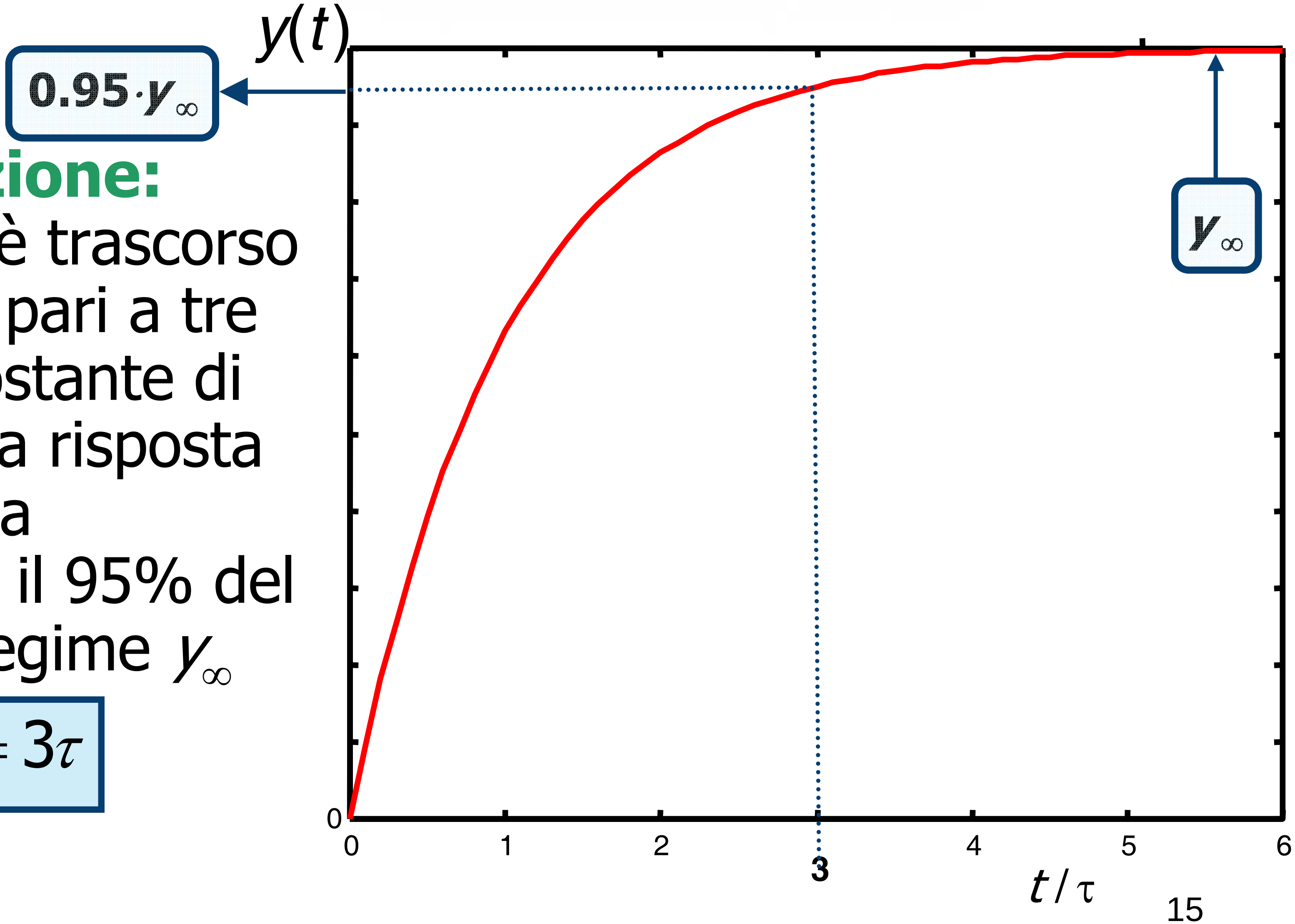
Tempo di assestamento

- **Tempo di assestamento a $\pm\,\varepsilon$ % $t_{a,\varepsilon\%}$** è il tempo necessario perché la risposta differisca definitivamente dal valore di regime y_∞ per una quantità pari all'ε % di quest'ultimo.
  Valori tipici di ε sono: $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 5$
- In pratica, il tempo di assestamento è il tempo necessario affinché la risposta entri nella fascia $[(1 - 0.01\varepsilon,\ 1 + 0.01\varepsilon\,]y_\infty$ e non vi esca più

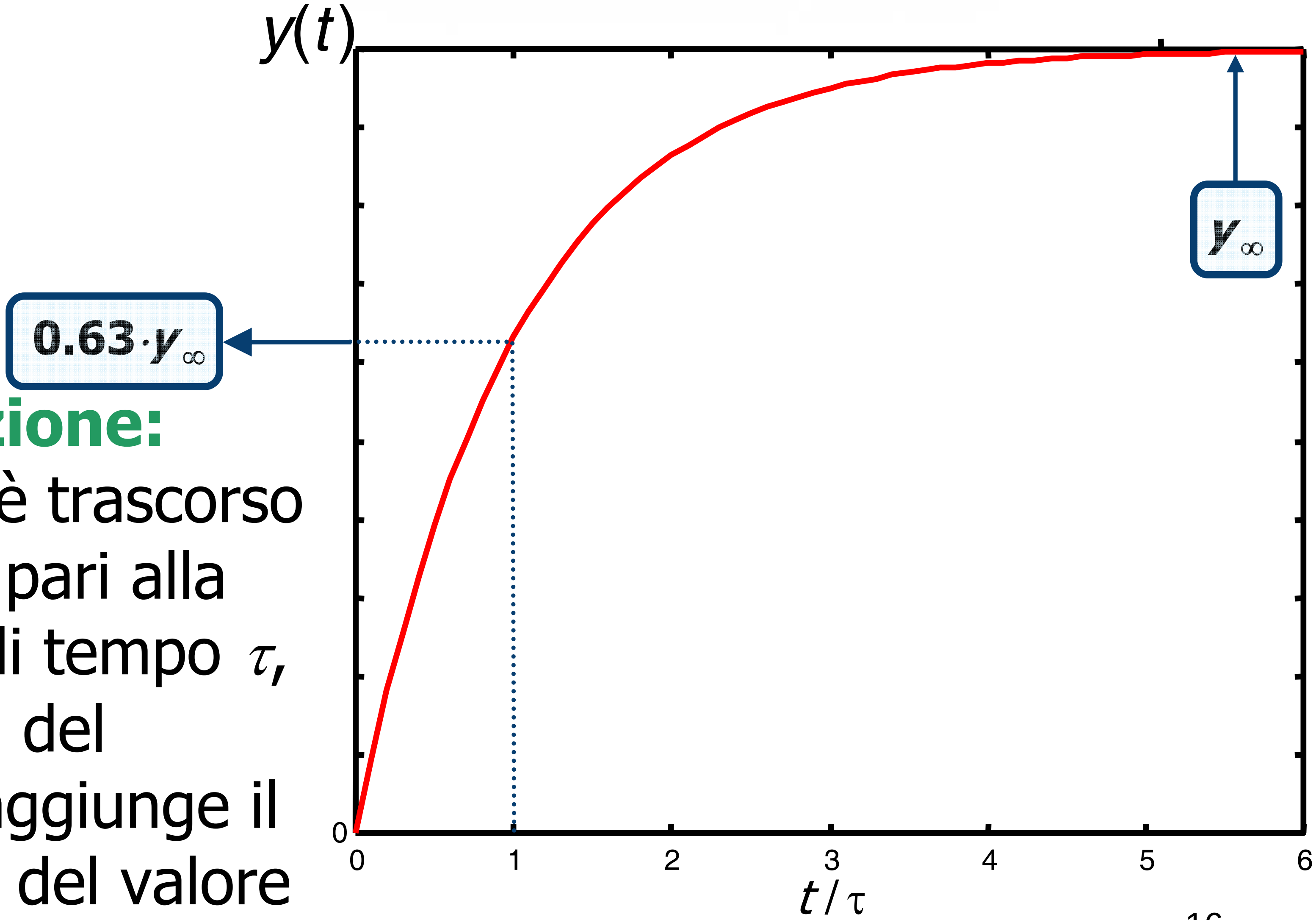
Andamento grafico e tempo di assestamento

- **Osservazione:** dopo che è trascorso un tempo pari a tre volte la costante di tempo τ, la risposta del sistema raggiunge il 95% del valore a regime y_∞

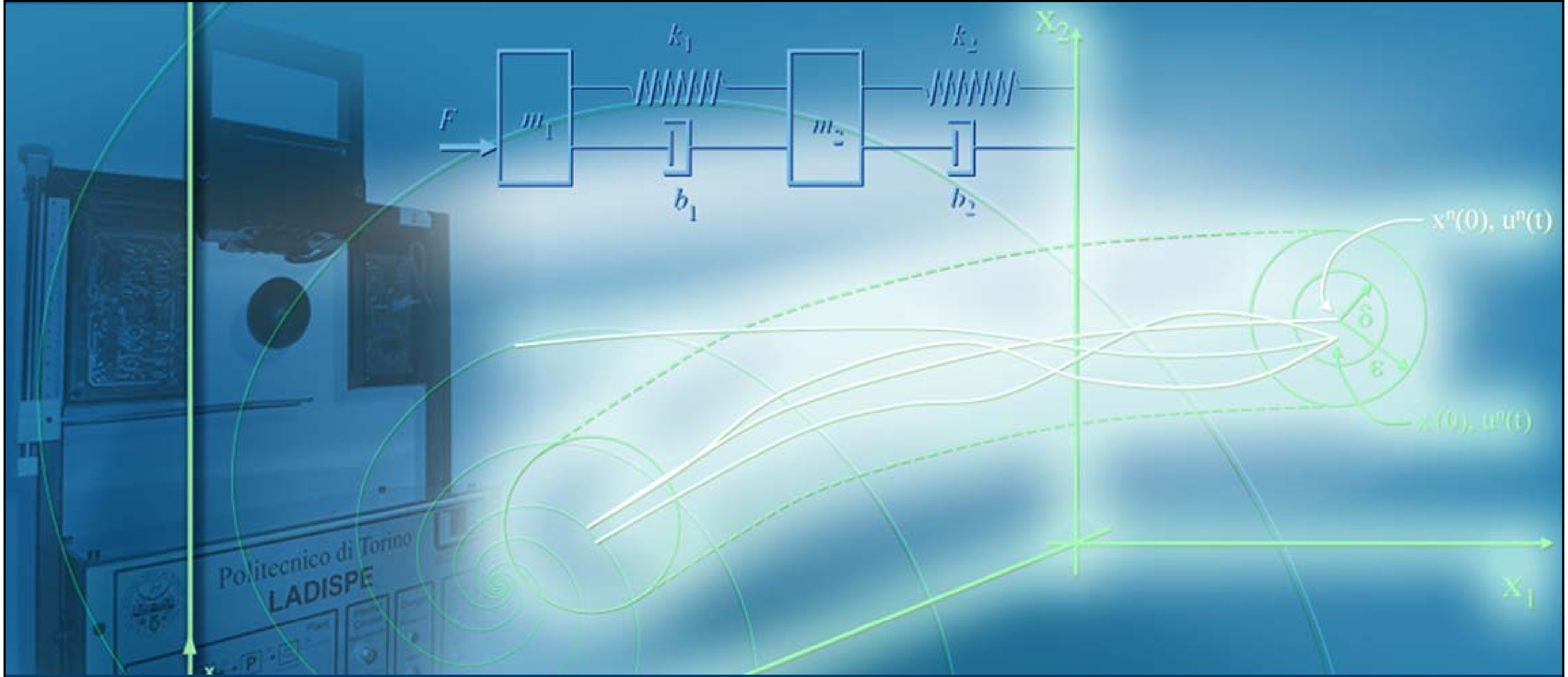
$$\boxed{t_{a,5\%} = 3\tau}$$



Andamento grafico e costante di tempo



- **Osservazione:** dopo che è trascorso un tempo pari alla costante di tempo τ, la risposta del sistema raggiunge il 63% circa del valore a regime y_∞



Risposte di sistemi del 1° e 2° ordine

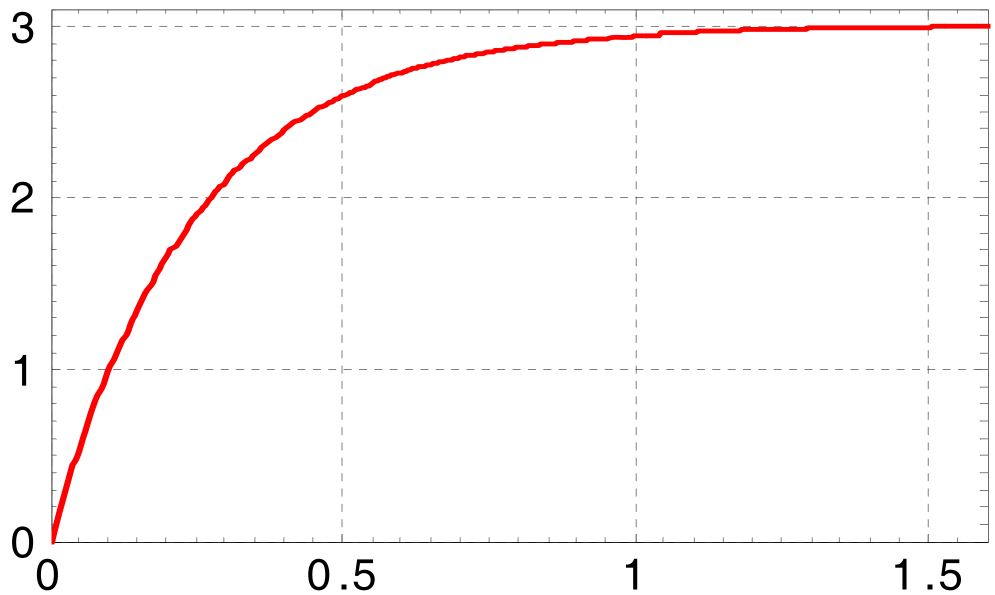
Determinazione di un modello del 1° ordine

Formulazione del problema

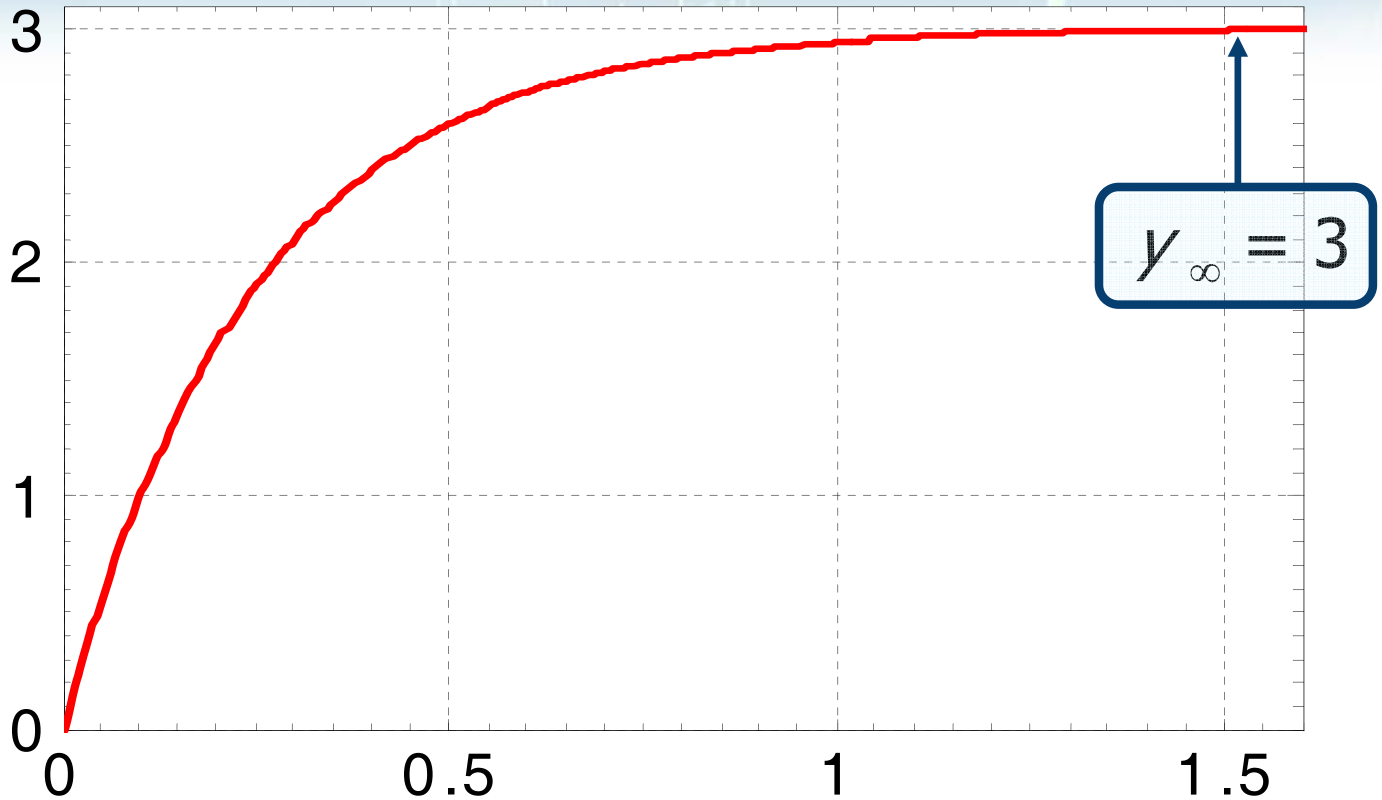
- Dato il seguente sistema dinamico del 1° ordine:

$$\boxed{H(s) = \frac{K}{1+\tau s}}$$

determinare i parametri K e τ in modo che la sua risposta ad un gradino di ampiezza unitaria $(\bar{u} = 1)$ sia quella illustrata in figura



Calcolo di *K*



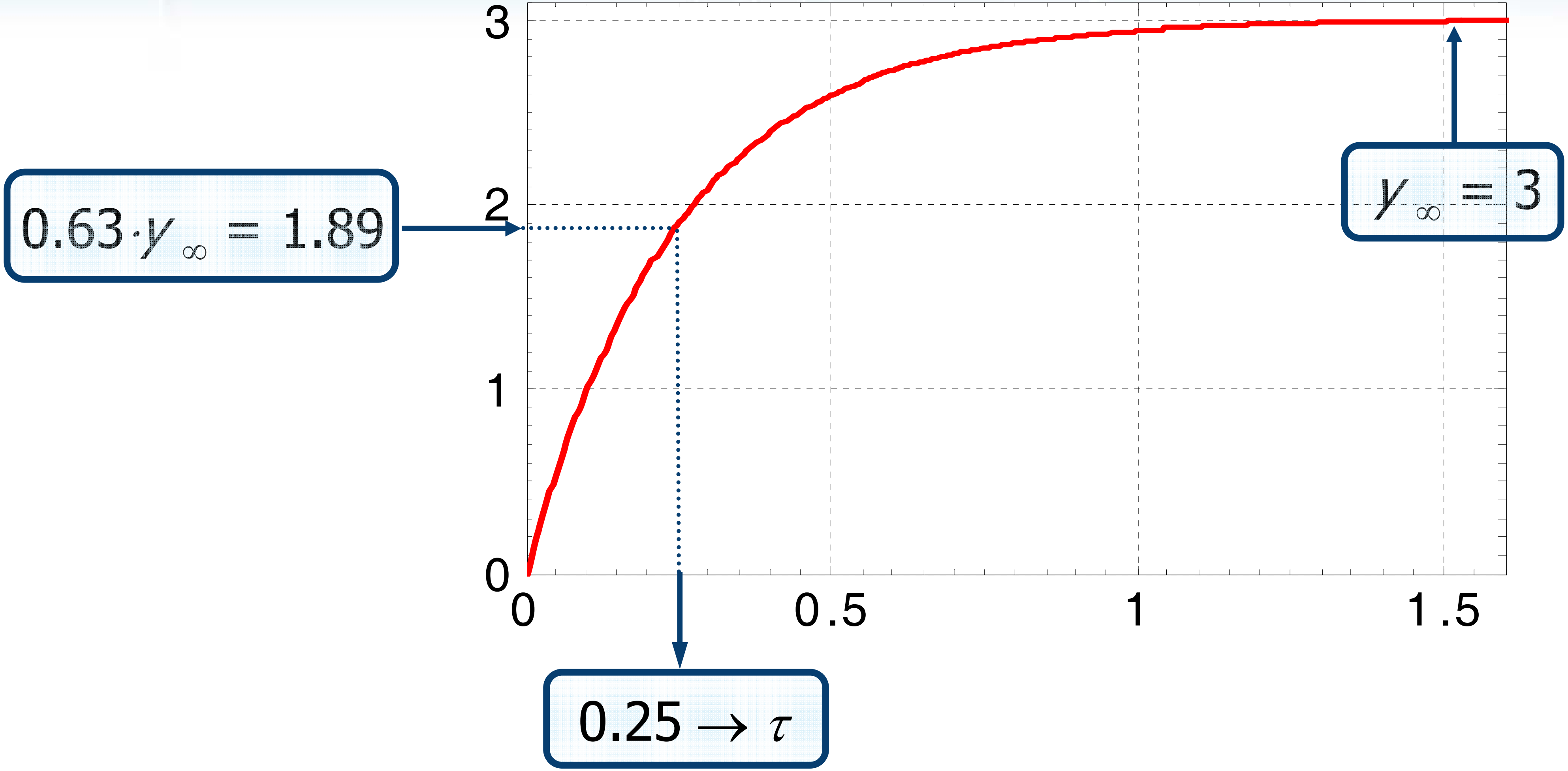
- Poiché

$$\boxed{y_\infty = K \cdot \bar{u} = 3, \quad \bar{u} = 1}$$

si ottiene:

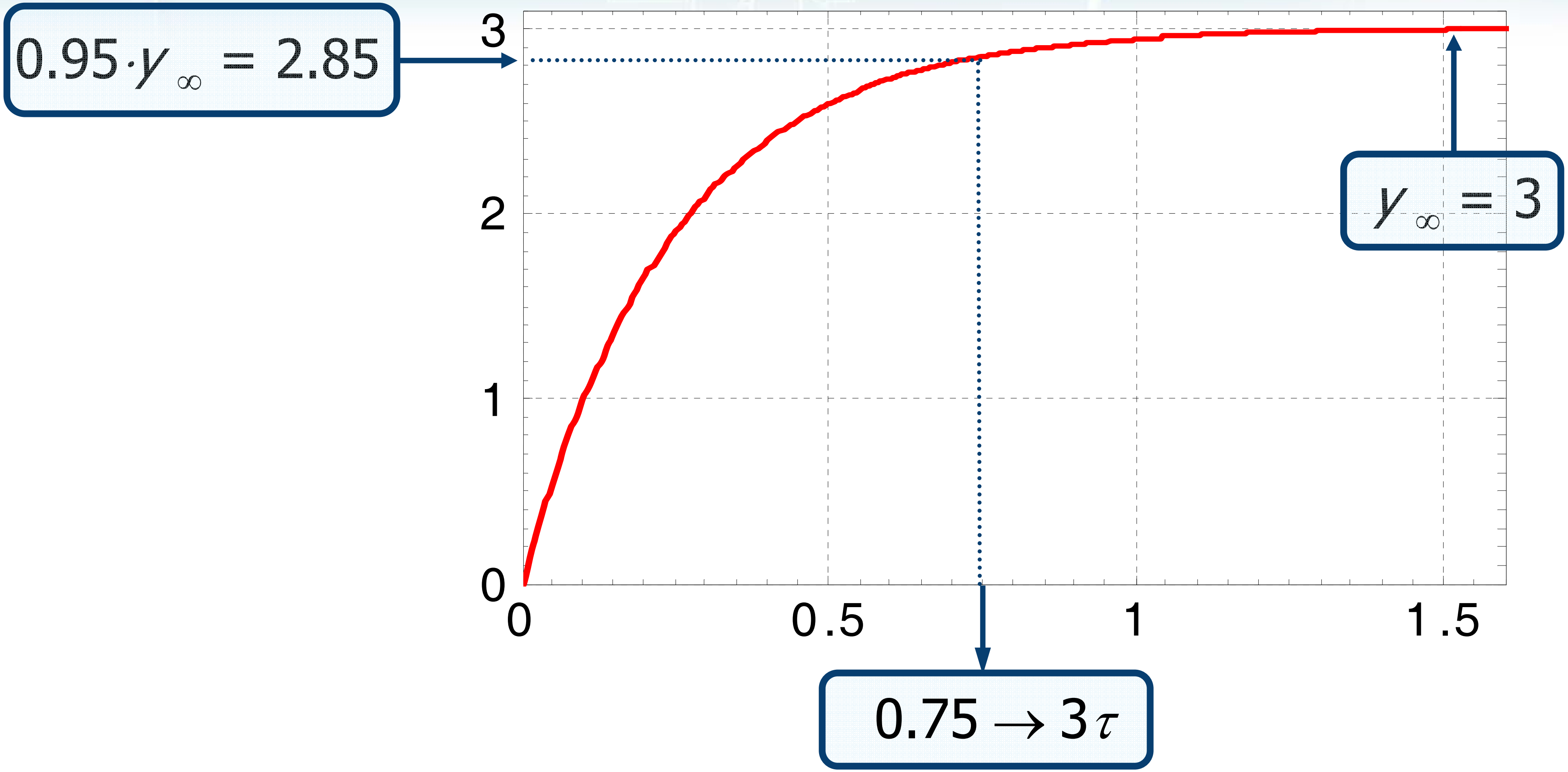
$$\boxed{K = \frac{y_\infty}{\bar{u}} = 3}$$

Calcolo di τ

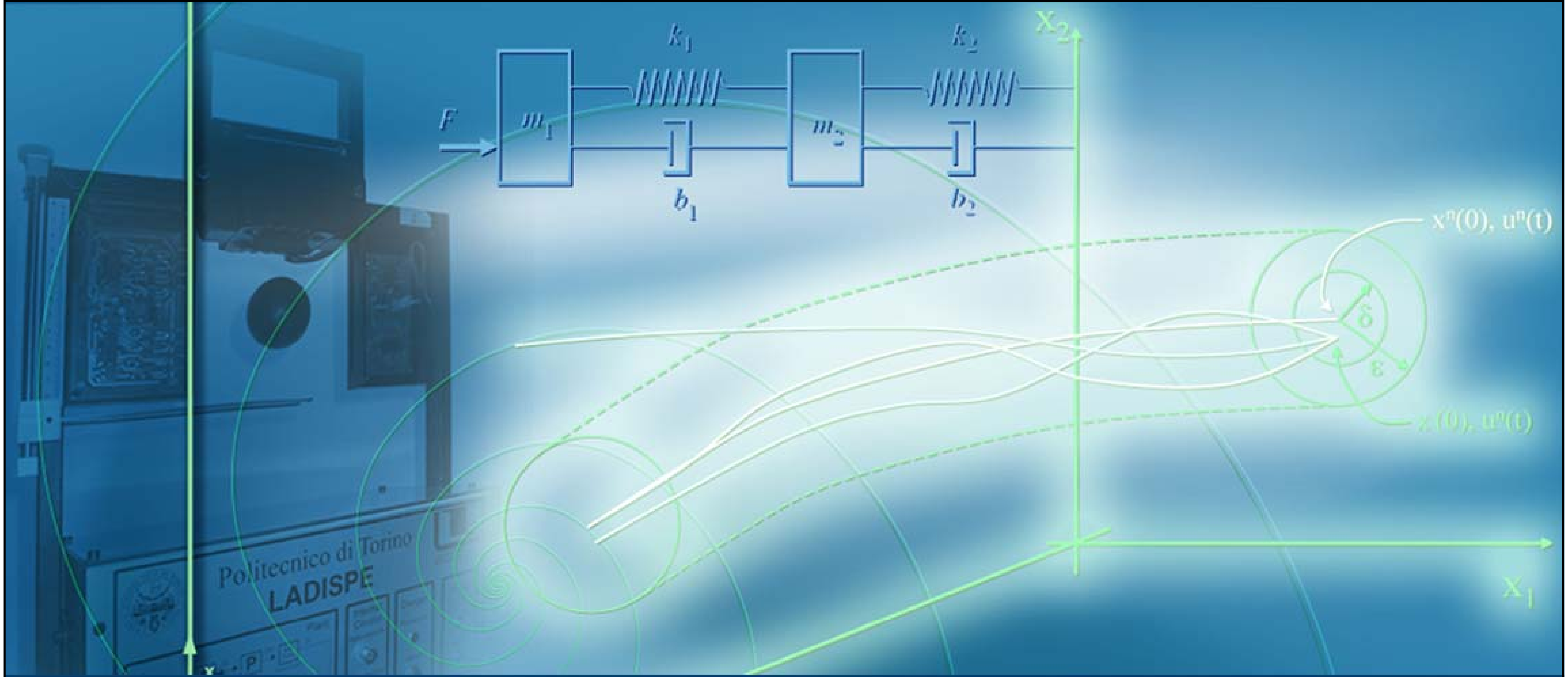


$$\tau = 0.25\ \text{s}$$

Calcolo di τ (metodo alternativo)



$$\tau = 0.75 / 3 = 0.25 \text{ s}$$



Risposta al gradino di sistemi del 1° e 2° ordine

Risposta al gradino di sistemi del 2° ordine

Funzione di trasferimento

- Consideriamo sistemi elementari del 2° ordine descritti dalla funzione di trasferimento:

$$H(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} K \rightarrow \text{ guadagno} \\ \omega_n \rightarrow \text{ pulsazione naturale} \\ 0 < \zeta < 1 \rightarrow \text{ smorzamento} \end{cases}$$

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} \rightarrow \text{ costante di tempo}$$

Risposta al gradino: espressione analitica

- Applicando al sistema del 2° ordine

$$H(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

un ingresso $u(t)$ a gradino di ampiezza $\bar{u}$:

$$u(t) = \bar{u}\,\varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{\bar{u}}{s}$$

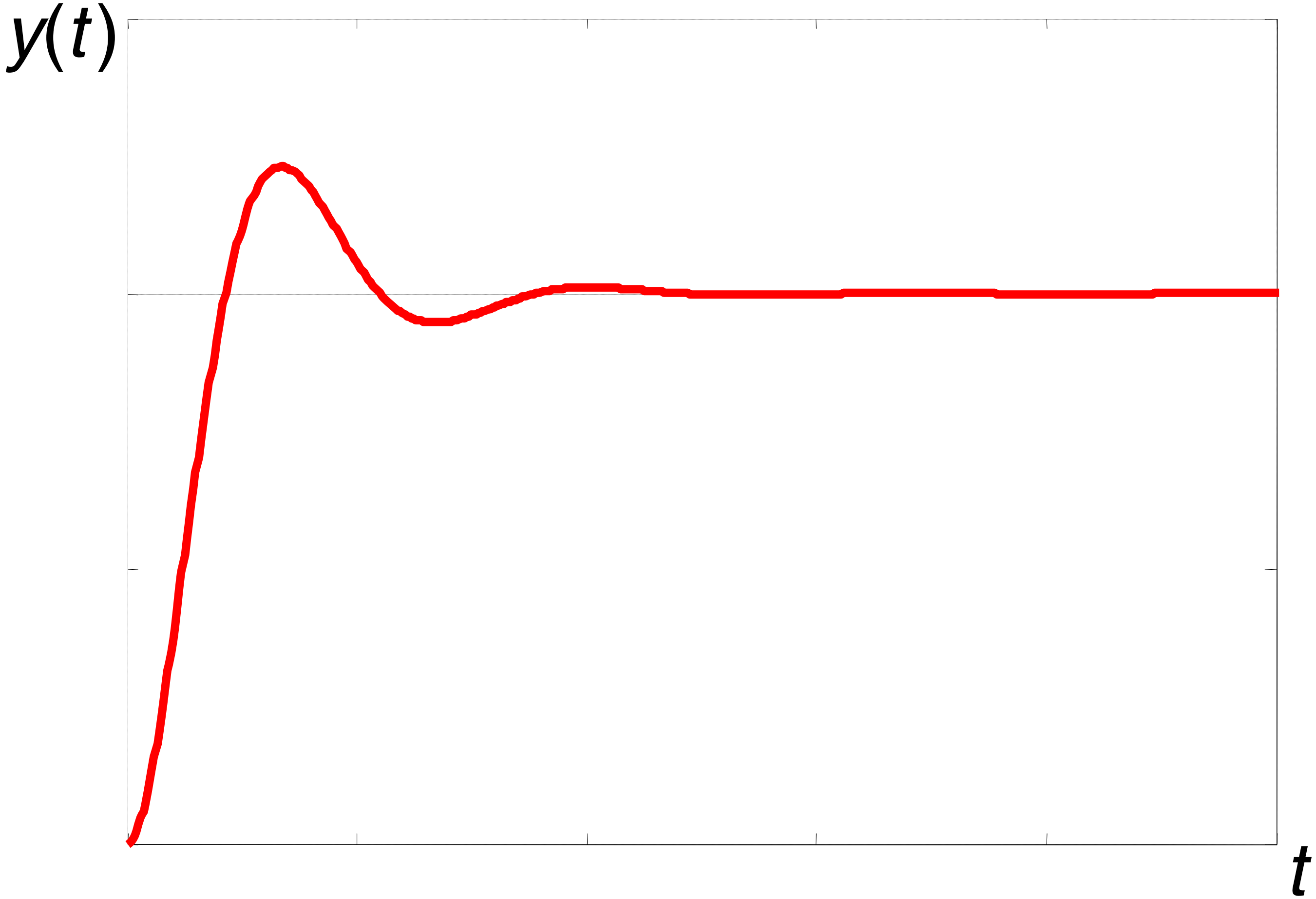
si ottiene la risposta:

$$Y(s) = H(s)U(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\frac{\bar{u}}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) =$$

$$= \bar{u}\,K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right) + \arccos(\zeta)\right), t \geq 0$$

Risposta al gradino: andamento grafico

$$y(t) = \bar{u}\,K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right) + \arccos(\zeta)\right), t \geq 0$$



Valore a regime e valore di picco (1/2)

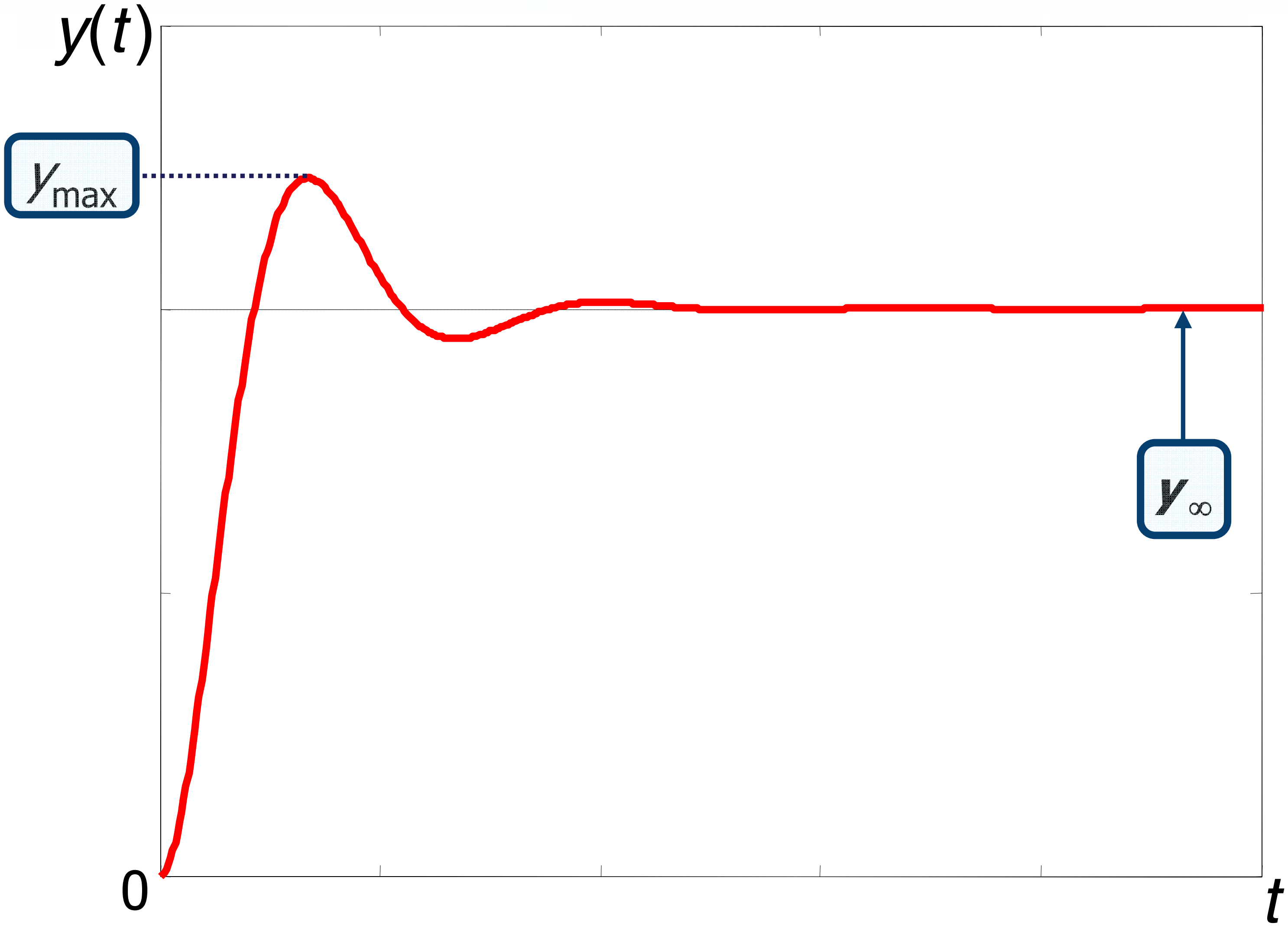
- **Valore a regime y_∞** è il valore a cui tende la risposta $y(t)$ per $t \to \infty$

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \\ = \lim_{s\to 0} s \cdot K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{\bar{u}}{s} = K \cdot \bar{u}$$

- **Valore di picco $y_{\max}$** è il valore istantaneo massimo della risposta $y(t)$

$$y_{\max} = \max_t y(t)$$

Valore a regime e valore di picco (2/2)



Sovraelongazione massima, tempo di picco (1/3)

- **Sovraelongazione massima $\hat{s}$** è il rapporto tra il massimo scostamento in ampiezza della risposta rispetto al valore di regime ed il valore di regime

$$\boxed{\hat{s} = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}}}$$

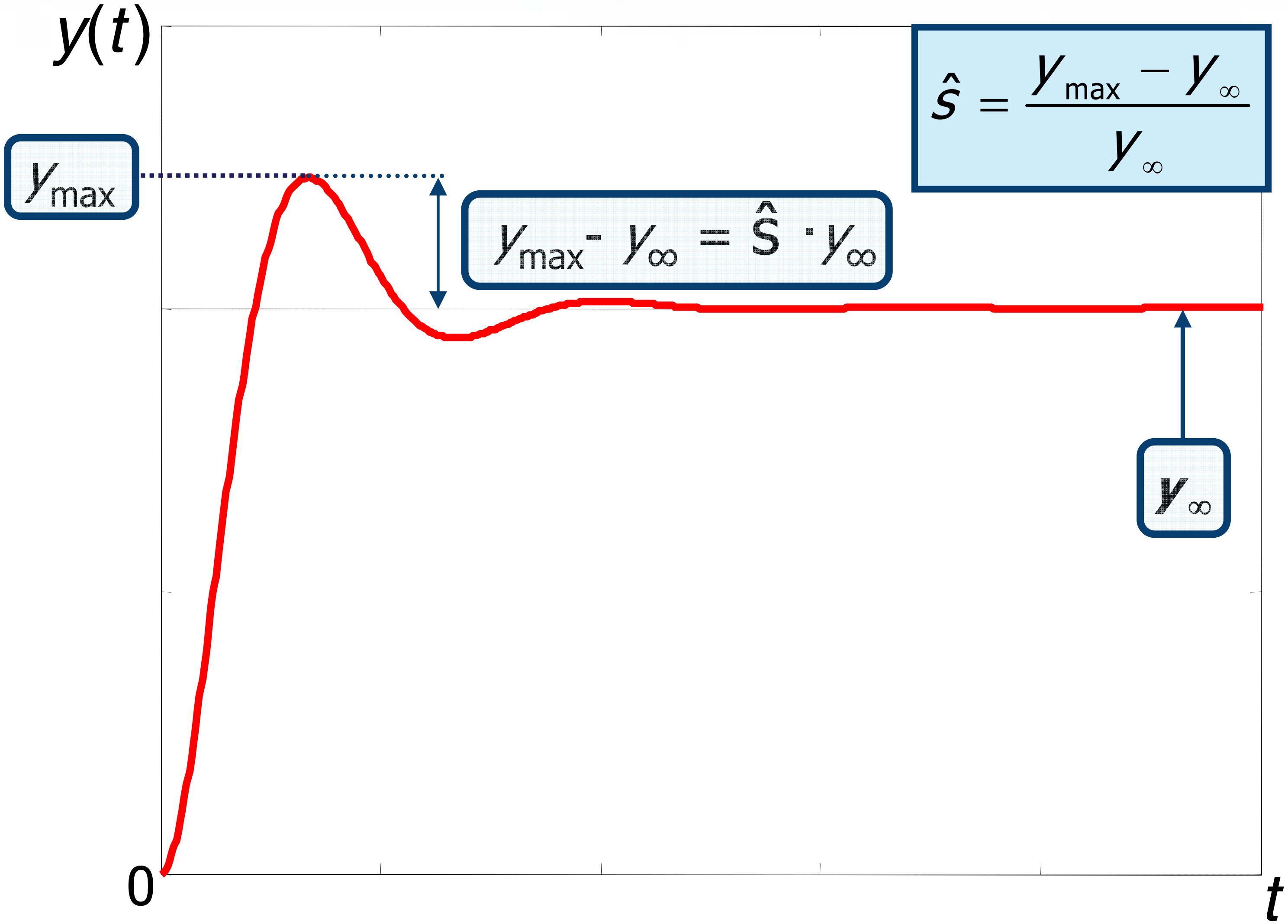
Sovraelongazione massima, tempo di picco (1/3)

- La sovraelongazione massima può anche essere espressa in termini percentuali $\hat{s}_{\%}$

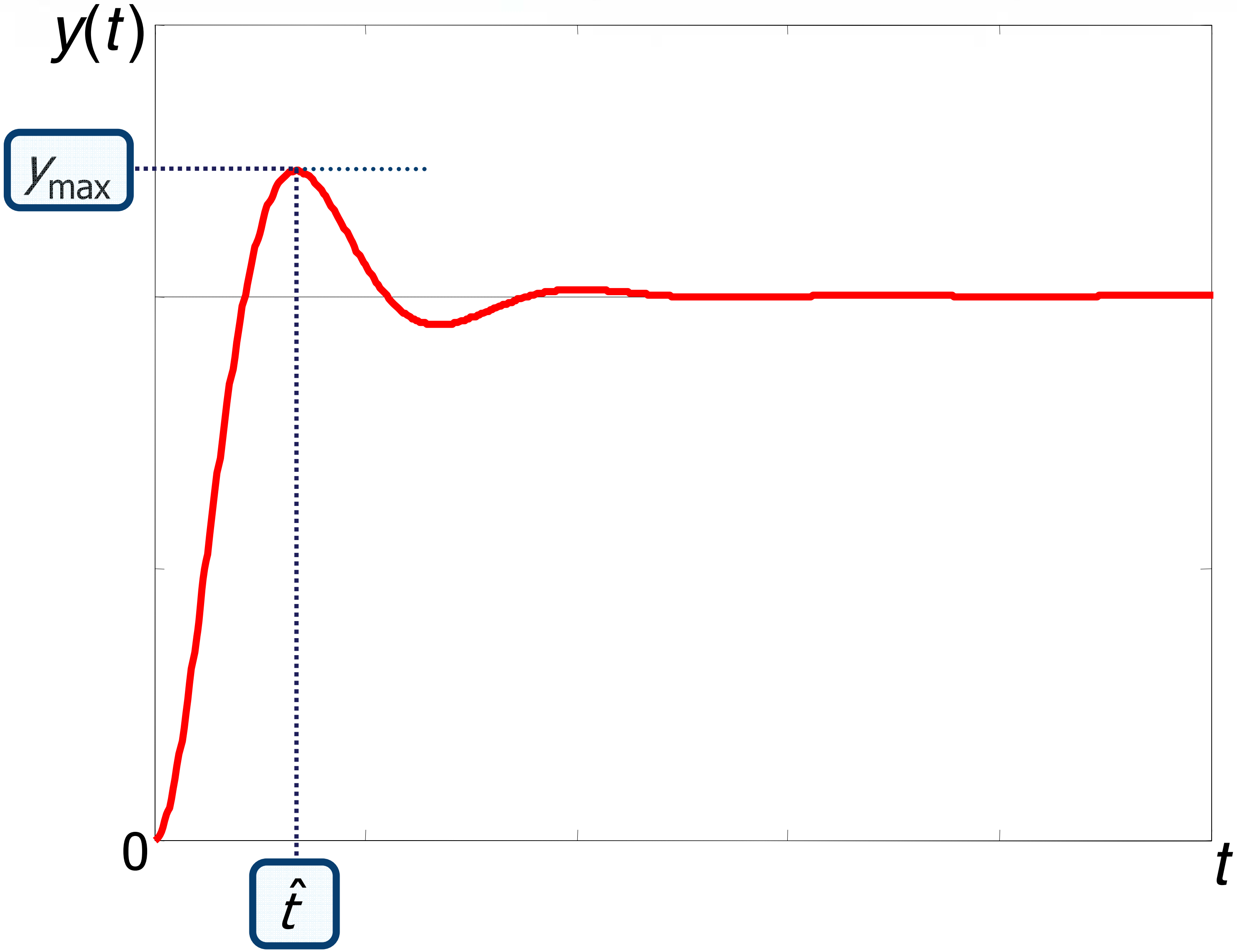
$$\boxed{\hat{s}_{\%} = 100 \cdot \hat{s}}$$

- **Tempo di picco** $\hat{t}$ è l'istante in cui la risposta raggiunge il valore di picco $y(\hat{t}) = y_{\text{max}}$

Sovraelongazione massima, tempo di picco (2/3)



Sovraelongazione massima, tempo di picco (2/3)



Sovraelongazione massima, tempo di picco (3/3)

- La sovraelongazione massima $\hat{s}$ dipende solo dallo smorzamento ζ:

$$\boxed{\hat{s} = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta = \frac{\left|\ln(\hat{s})\right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{s})}}}$$

- Il tempo di picco $\hat{t}$ dipende sia dallo smorzamento ζ sia dalla pulsazione naturale ω_n:

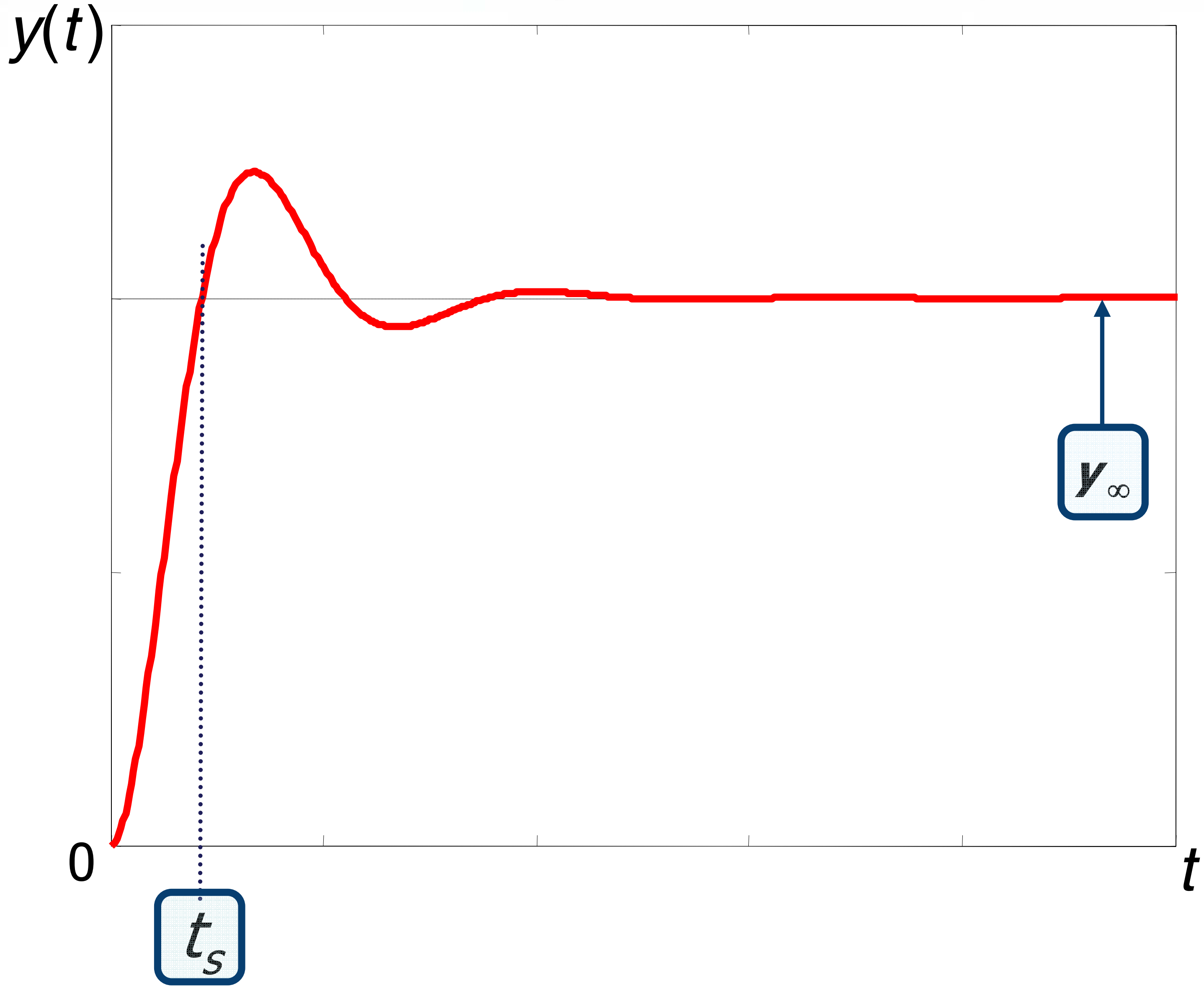
$$\boxed{\hat{t} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Tempi di salita

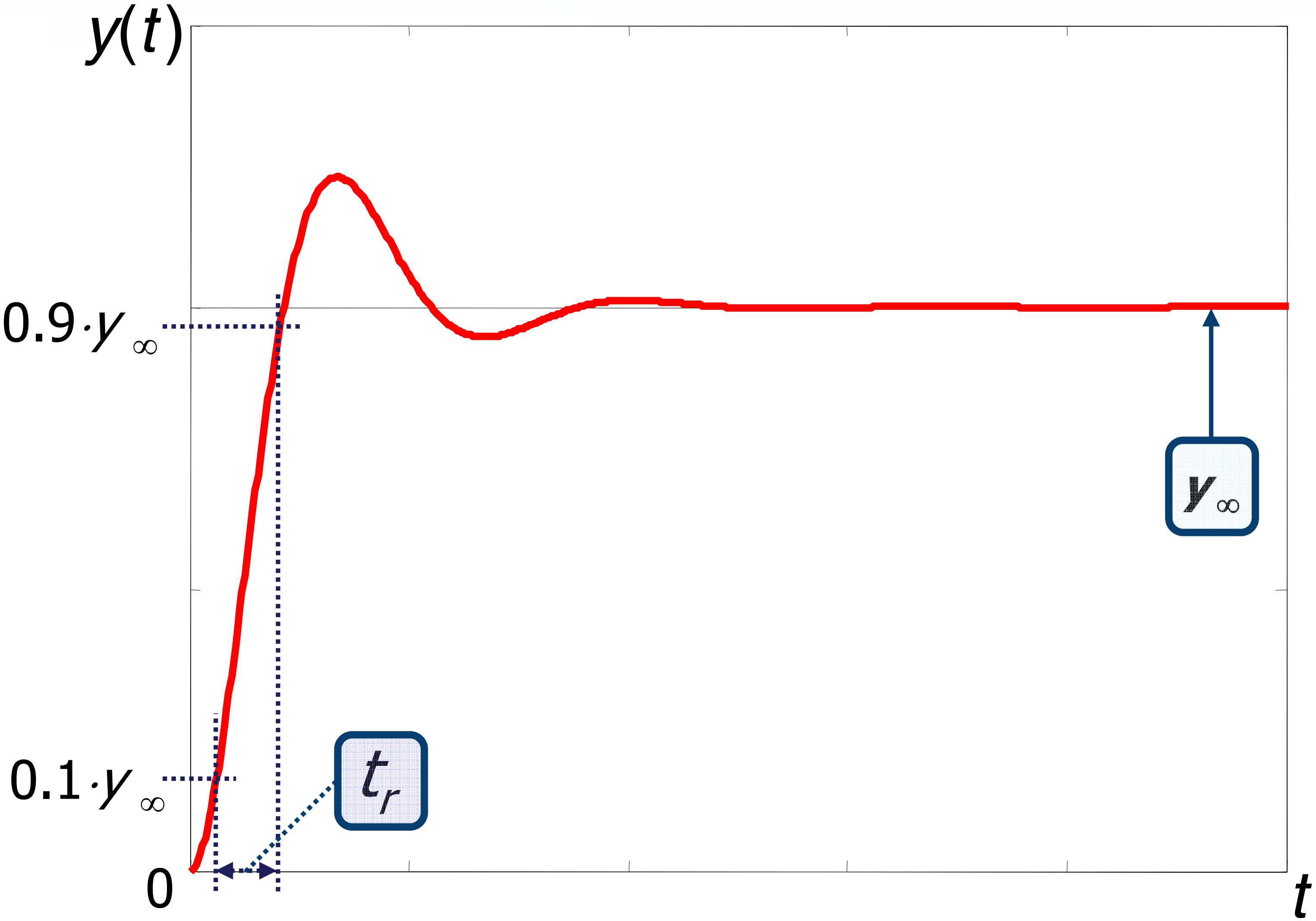
- **Tempo di salita t_s** è il primo istante in cui la risposta raggiunge il valore di regime → $y = y_\infty$
- **Tempo di salita 10% ÷ 90% t_r** è il tempo richiesto perché la risposta passi, per la prima volta dal 10% al 90% del valore di regime $y = y_\infty$
- Entrambi dipendono sia dallo smorzamento ζ sia dalla pulsazione naturale ω_n

$$\boxed{t_s = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\pi - \arccos(\zeta)\right), t_r \approx \frac{2.16\zeta + 0.6}{\omega_n}}$$

Tempo di salita



Tempo di salita 10% - 90%

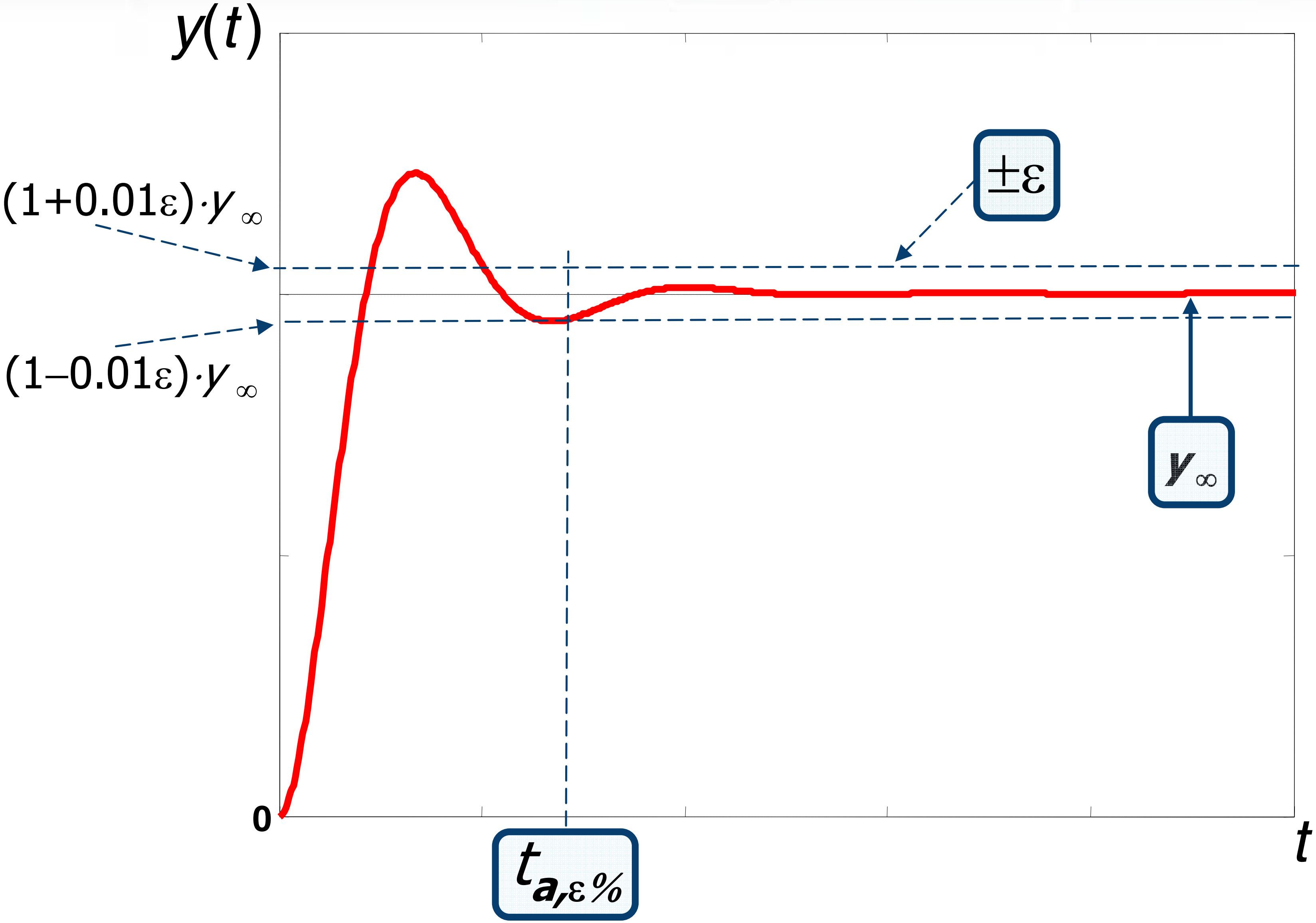


Tempo di assestamento (1/2)

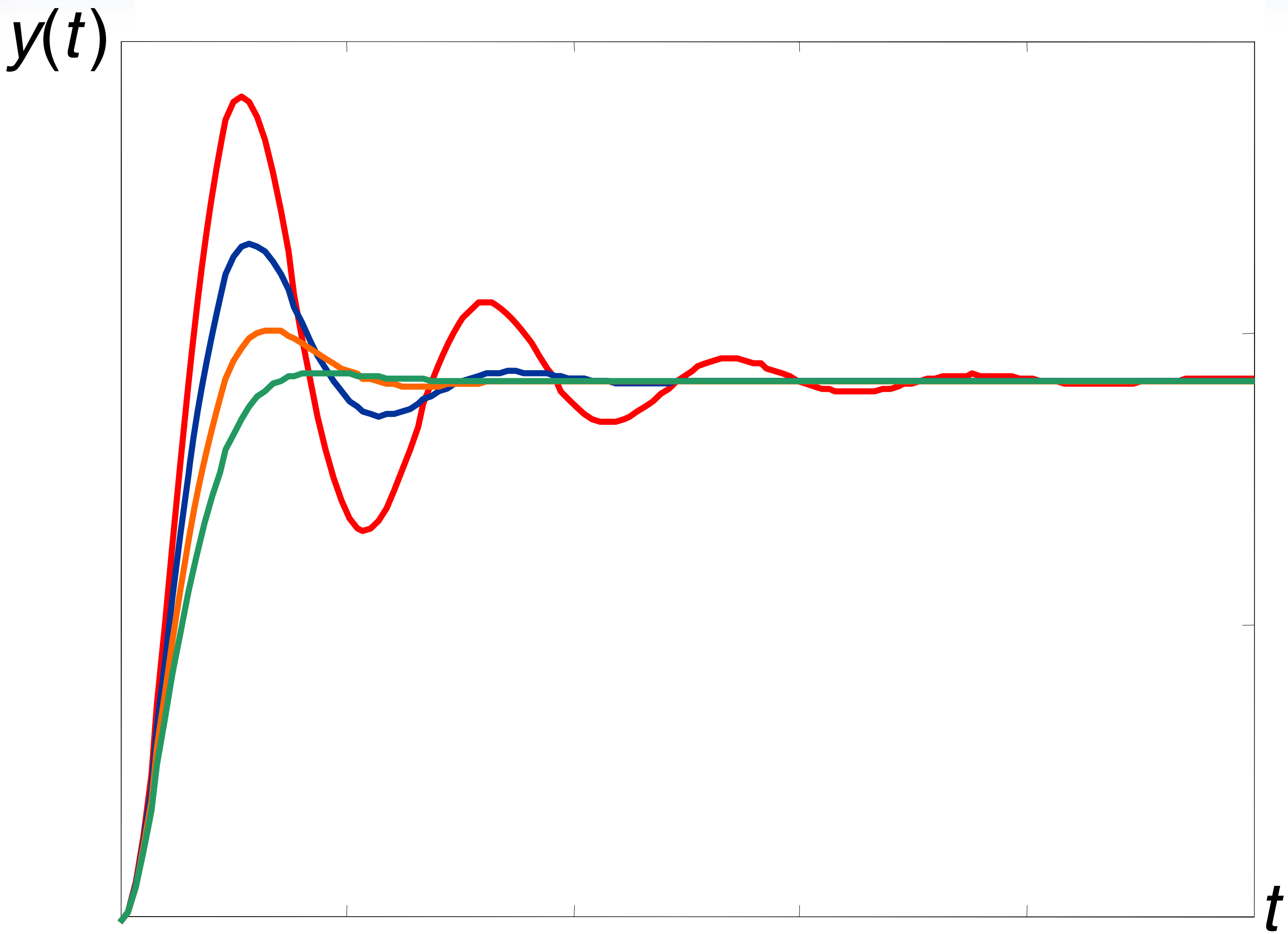
- **Tempo di assestamento a $\pm\ \varepsilon$ % $t_{a,\varepsilon\%}$** è il tempo necessario perché la risposta differisca definitivamente dal valore di regime y_∞ per una quantità pari all'ε % di quest'ultimo.
  Valori tipici di ε sono: $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 5$
- In pratica, il tempo di assestamento è il tempo necessario affinché la risposta entri nella fascia $[1 - 0.01\varepsilon, 1 + 0.01\varepsilon\ ]y_\infty$ e non vi esca più
- Dipende sia dallo smorzamento ζ sia dalla pulsazione naturale ω_n

$$\boxed{t_{a,\varepsilon\%} \approx -\frac{\ln(0.01\varepsilon)}{\zeta\omega_n}}$$

Tempo di assestamento (2/2)

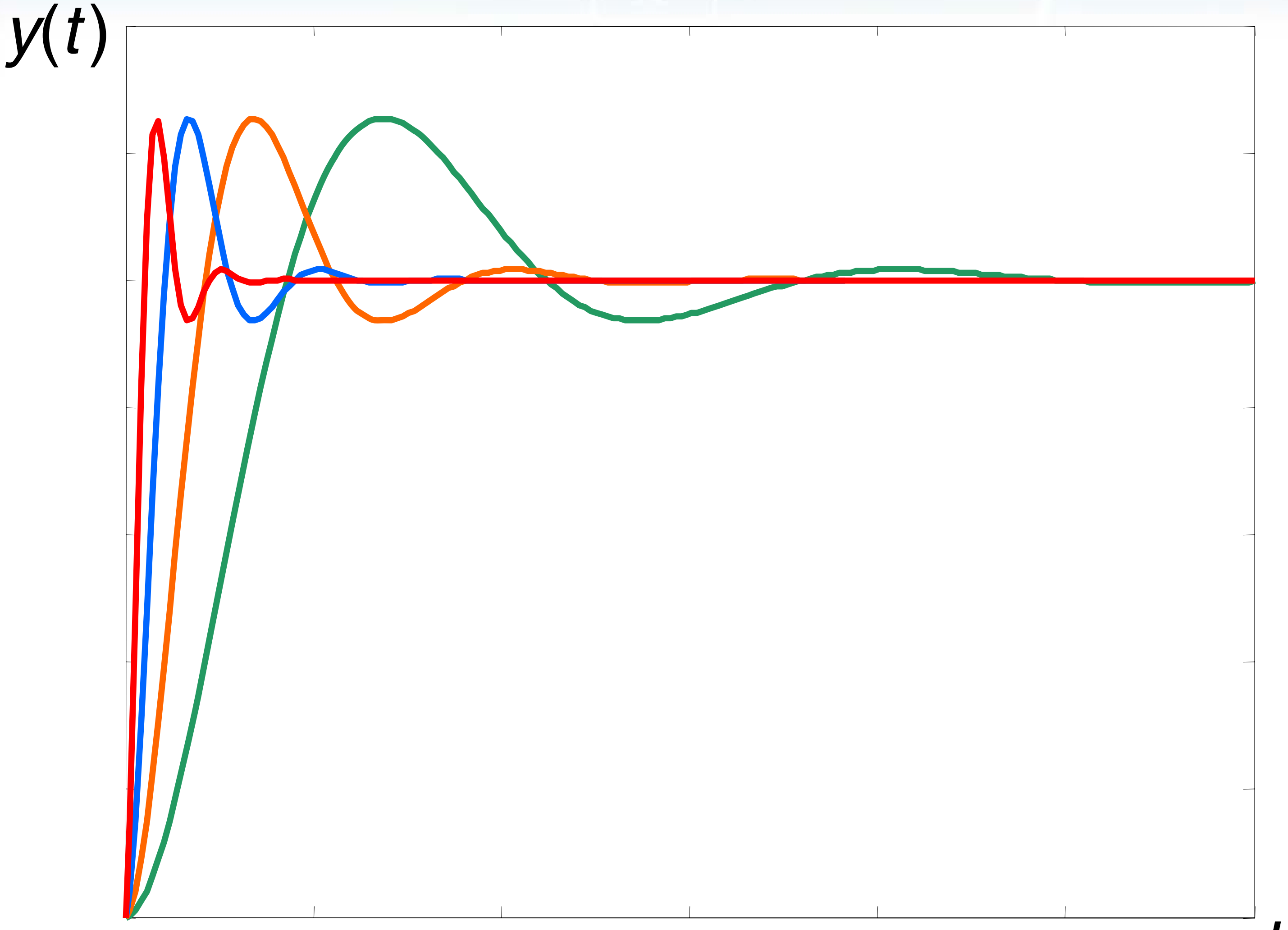


Comportamento al variare di ζ



ω_n=1 rad/s ζ = 0.8, 0.6, 0.4, 0.2

Comportamento al variare di ω_n



ζ = 0.4 ω_n= 0.5, 1, 2, 4 rad/s

Caso ζ = 1 (1/3)

- Nel caso $\zeta = 1$, la funzione di trasferimento:

$$\boxed{H(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

diventa:

$$\boxed{H(s) = \frac{K}{(1+\tau s)^2}, \tau = \frac{1}{\omega_n}}$$

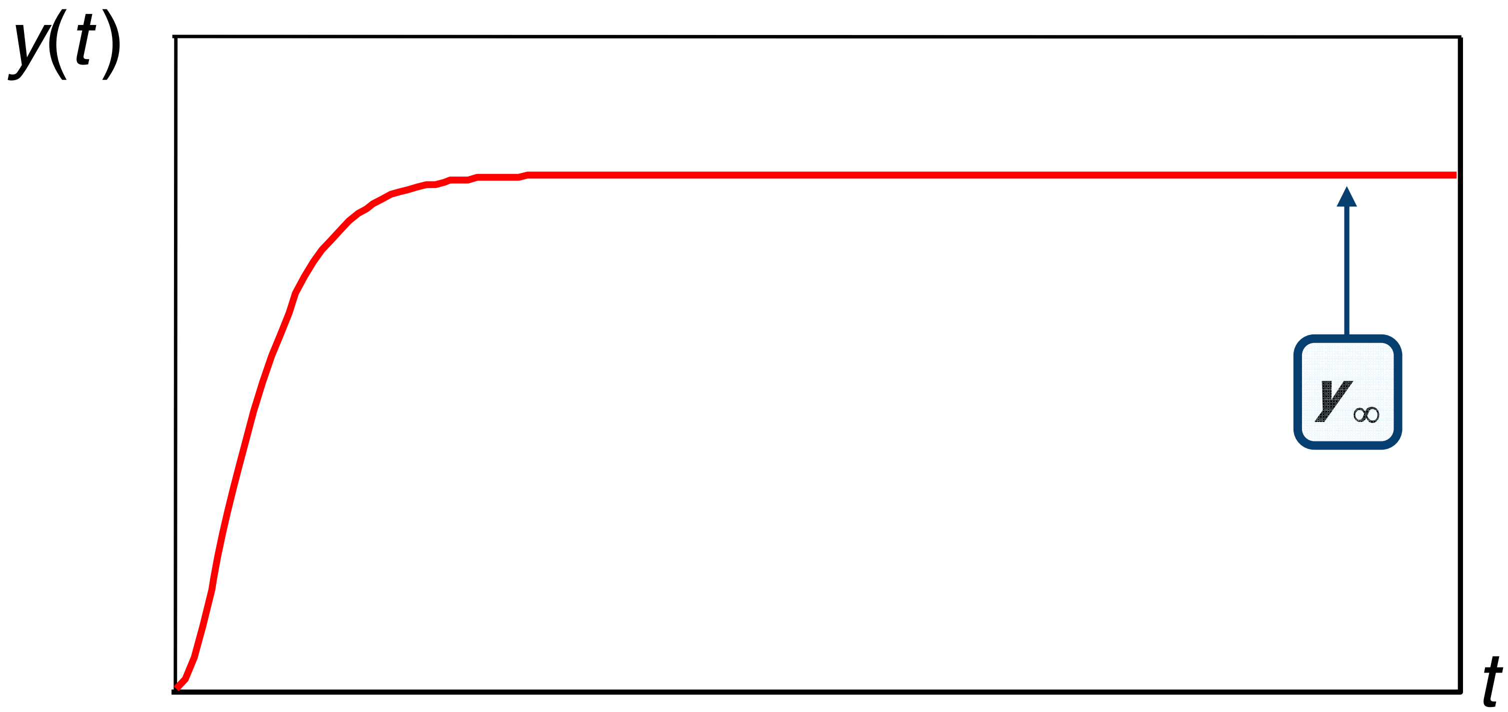
→ due poli $\mathbb{R}$ coincidenti in $s = -1/\tau$

- La risposta ad un gradino di ampiezza $\bar{u}$ è

$$\boxed{y(t) = \bar{u} \cdot K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right), t \geq 0}$$

Caso ζ = 1 (2/3)

- Il corrispondente andamento grafico è:



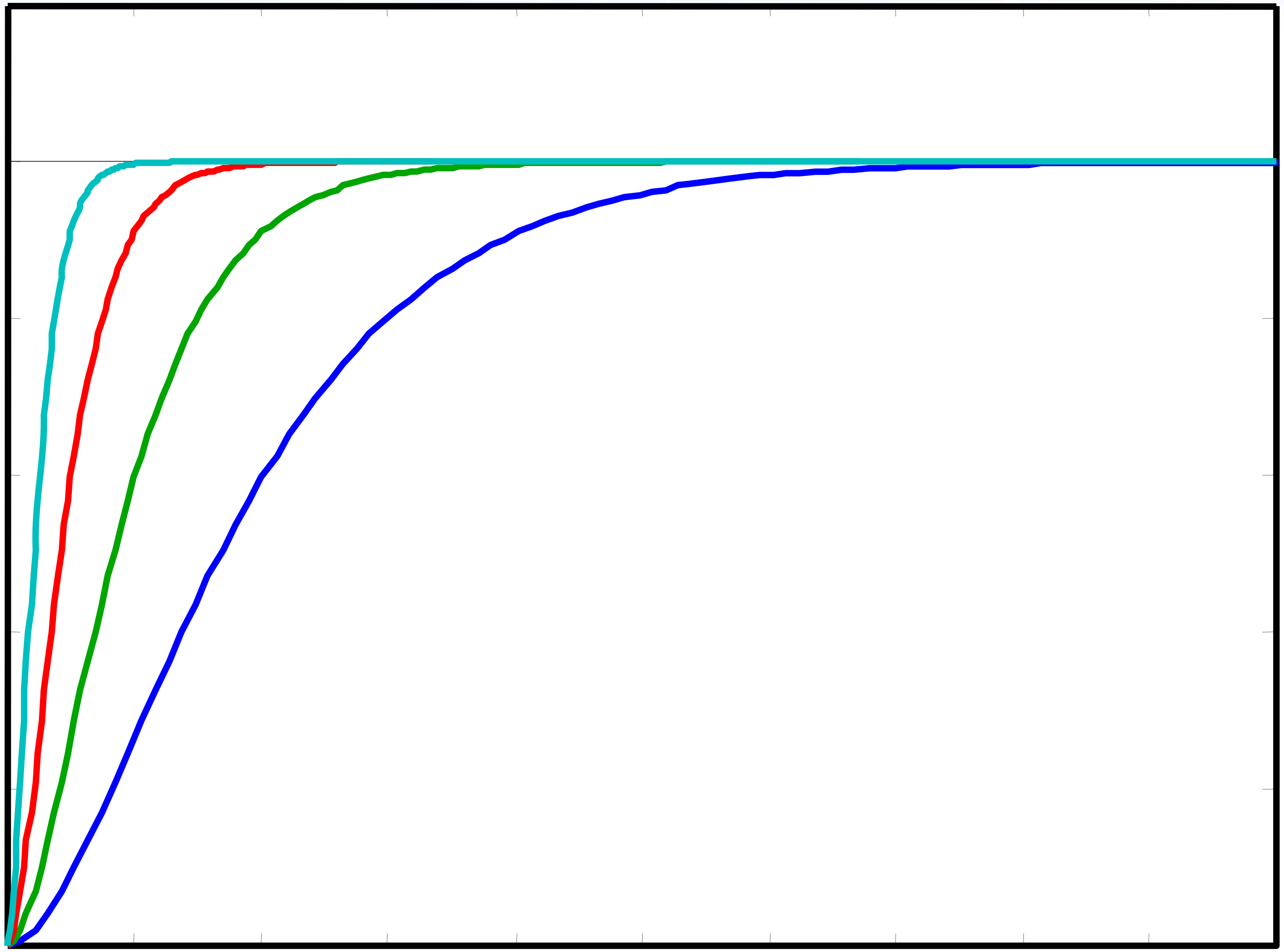
- Si noti l'assenza di oscillazioni e di sovraelongazione nel transitorio che precede il raggiungimento del valore di regime y_{∞}

Caso ζ = 1 (3/3)

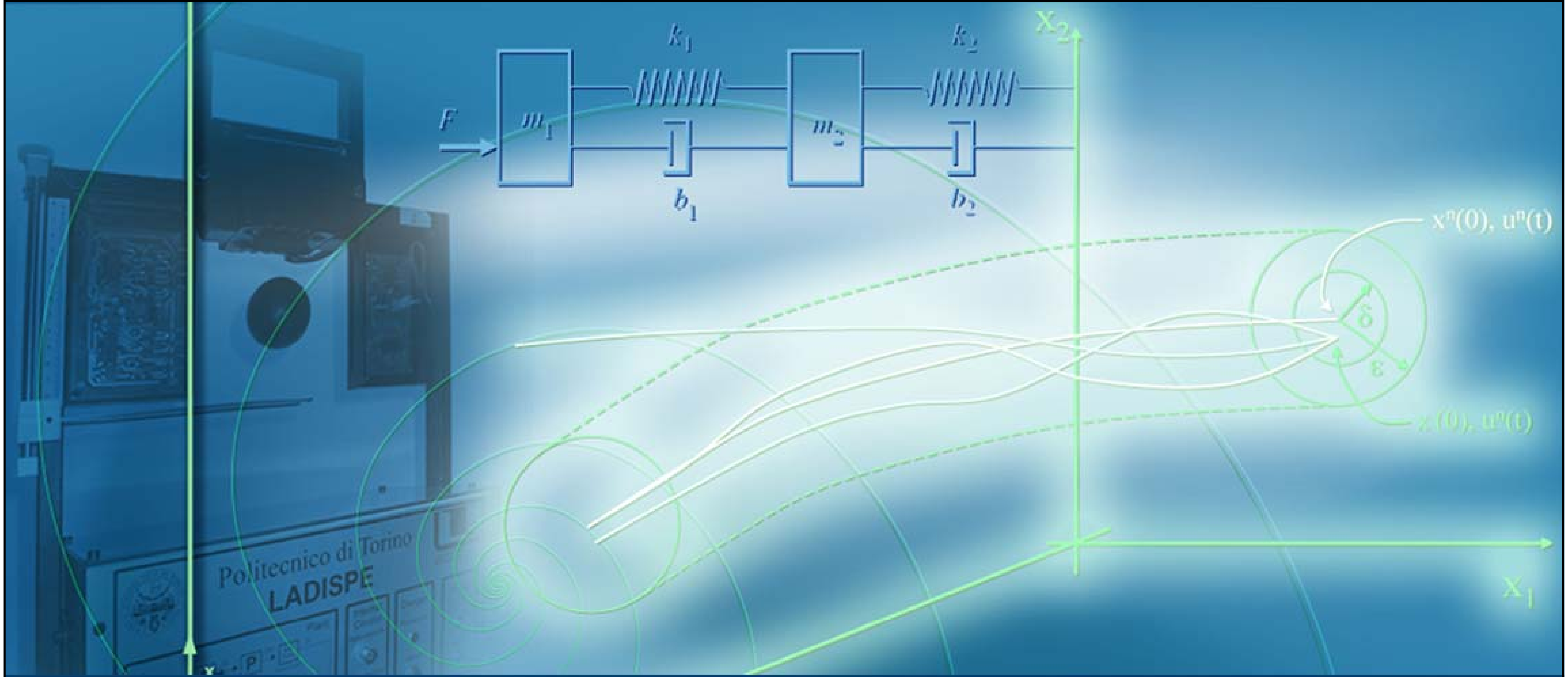
- Le caratteristiche della risposta possono essere studiate considerando i seguenti parametri (già definiti in precedenza):
  - Valore a regime y_∞
  - Tempo di salita 10% - 90% t_r
  - Tempo di assestamento a ± ε% $t_{a,\,\varepsilon\%}$
- La seguente tabella fornisce dei legami approssimati tra i parametri y_∞ , t_r , $t_{a,\,\varepsilon\%}$ e quelli della fdt K e τ

y_∞	t_r	$t_{a,\,5\%}$	$t_{a,\,1\%}$
$\bar{u}\cdot K$	$\approx 3.36\cdot\tau$	$\approx 4.74\cdot\tau$	$\approx 6.64\cdot\tau$

Caso ζ = 1 andamento al variare di τ



$\zeta = 1 \quad \tau = 2, 1, 0.5, 0.25$ s



Risposta al gradino di sistemi del 1° e 2° ordine

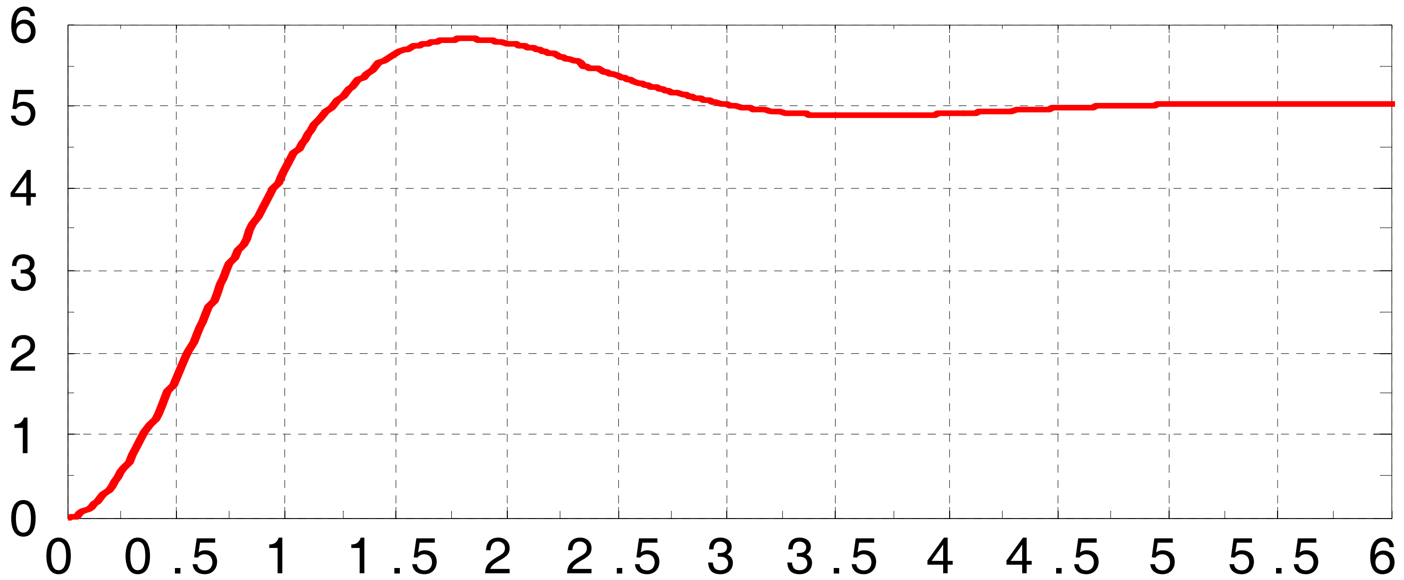
Determinazione di un modello del 2° ordine

Formulazione del problema

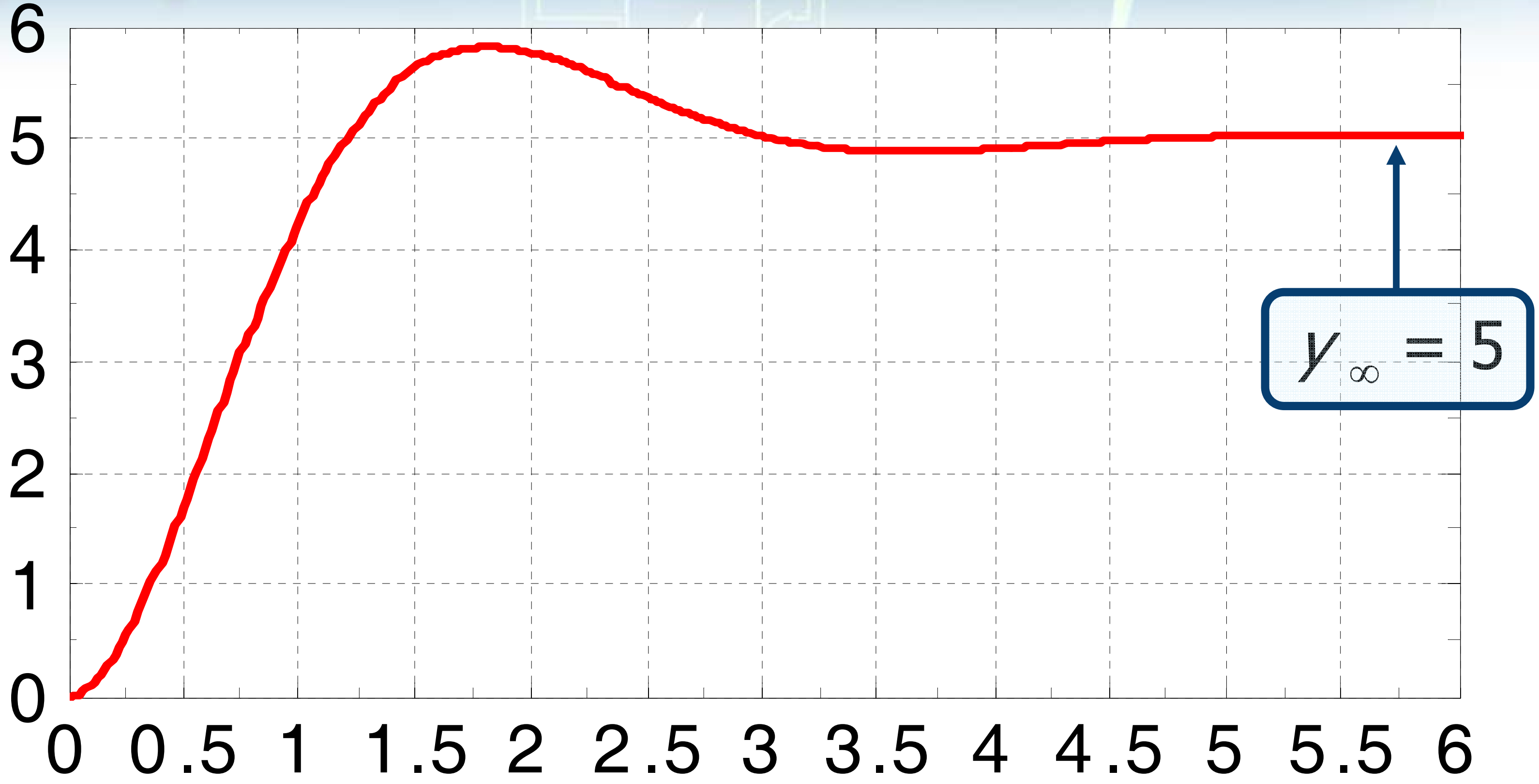
- Dato il seguente sistema dinamico del 2° ordine:

$$\boxed{H(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

determinare i parametri K, ζ e ω_n in modo che la sua risposta ad un gradino di ampiezza unitaria $(\bar{u} = 1)$ sia quella illustrata in figura



Calcolo di *K*



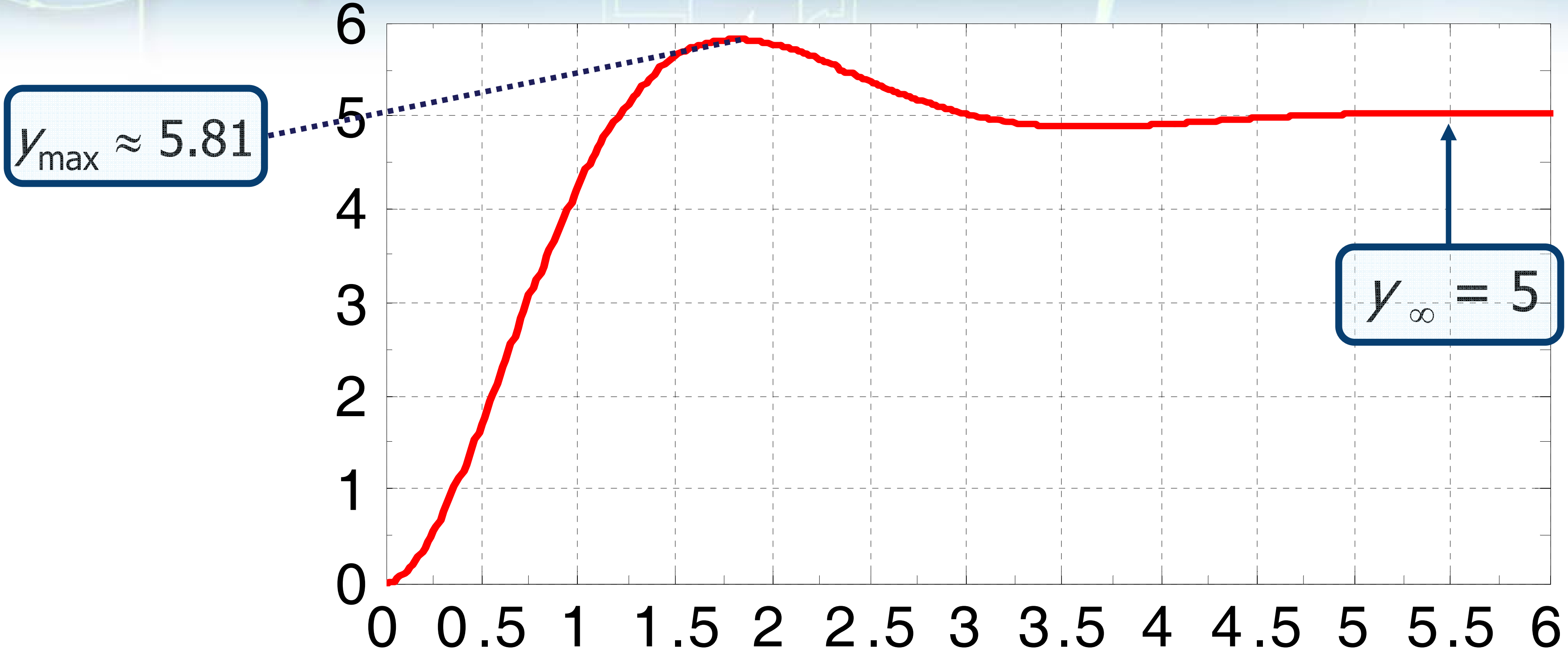
- Poiché

$$y_\infty = K \cdot \bar{u} = 5, \quad \bar{u} = 1$$

si ottiene:

$$K = \frac{y_\infty}{\bar{u}} = 5$$

Calcolo di ζ (1/2)



- Poiché

$$y_{\infty} = 5, \quad y_{max} = 5.81$$

si ottiene:

$$\hat{s} = \frac{y_{max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} = 0.162$$

Calcolo di ζ (2/2)

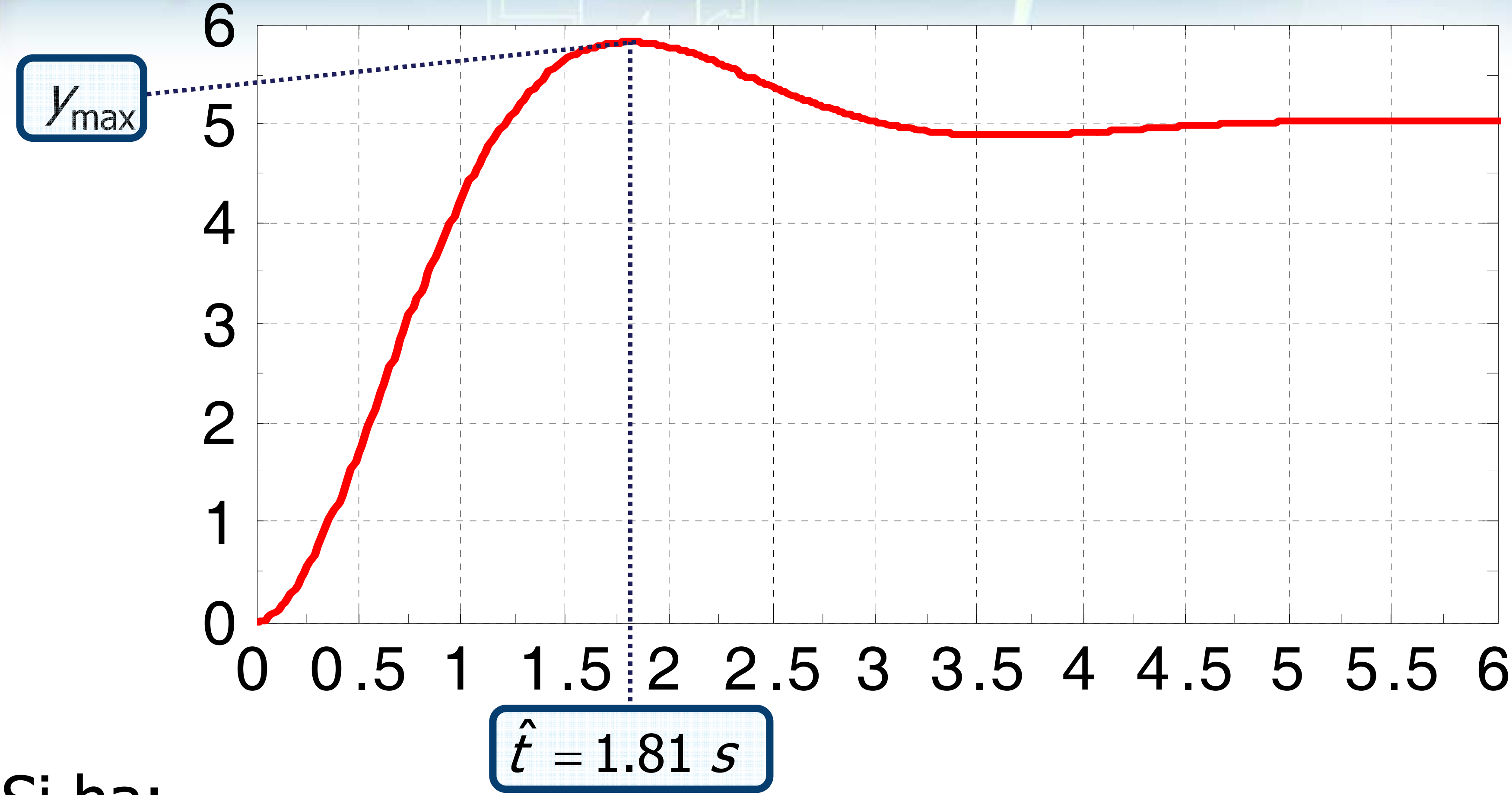
- Inoltre, dal momento che risulta:

$$\zeta = \frac{\left|\ln(\hat{s})\right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{s})}}$$

si ottiene:

$$\zeta = \frac{\left|\ln(\hat{s})\right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{s})}} \underset{\hat{s}=0.162}{\underset{\uparrow}{\approx}} 0.5$$

Calcolo di ω_n



- Si ha:

$$\hat{t} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{\hat{t}\sqrt{1-\zeta^2}} \underset{\zeta=0.5,\hat{t}=1.81}{\overset{\uparrow}{=}} 2\ \text{rad/s}$$