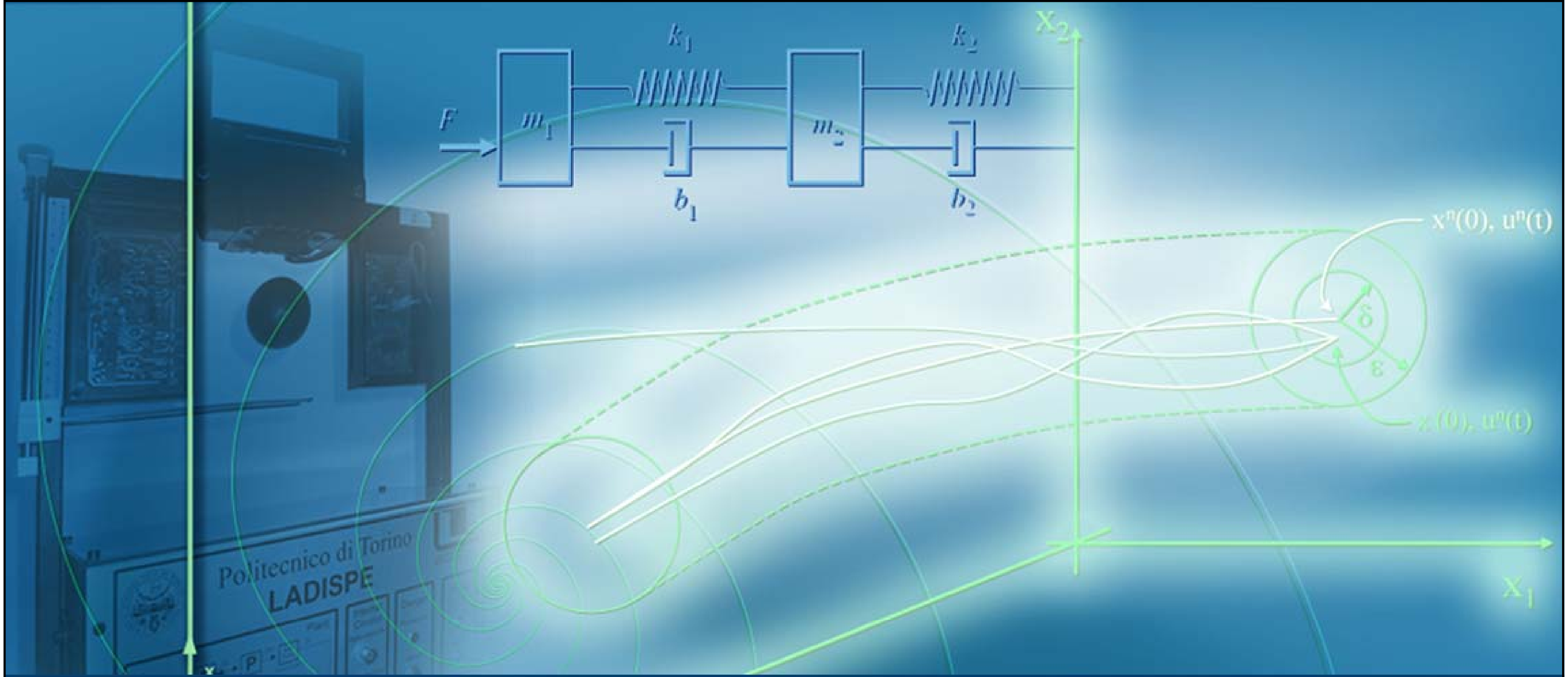
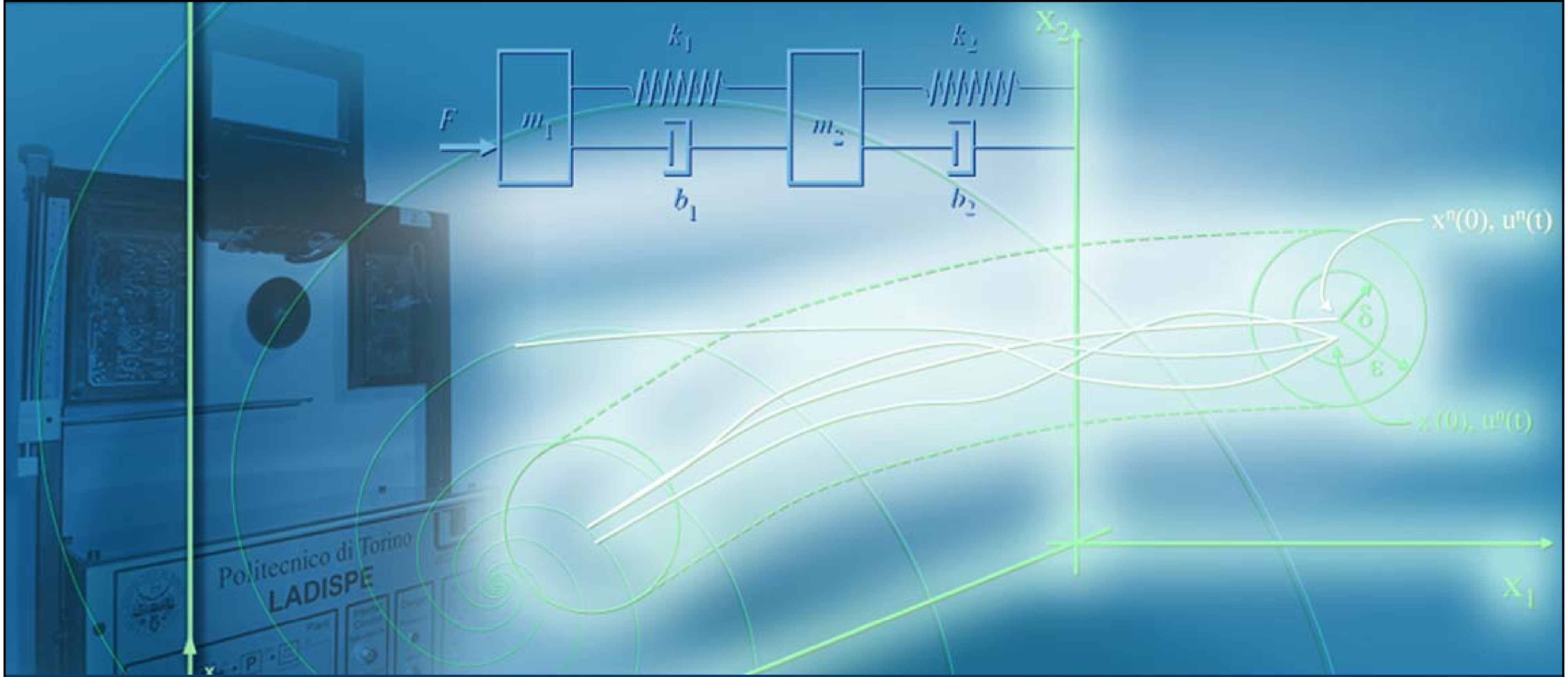


Fondamenti di Automatica

Unità 3
Equilibrio e stabilità di sistemi dinamici

Equilibrio e stabilità di sistemi dinamici

- Equilibrio di sistemi dinamici
- Linearizzazione di sistemi dinamici
- Stabilità interna di sistemi dinamici
- Stabilità interna di sistemi dinamici LTI
- Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI
- Stabilità dell’equilibrio per sistemi dinamici non lineari mediante linearizzazione

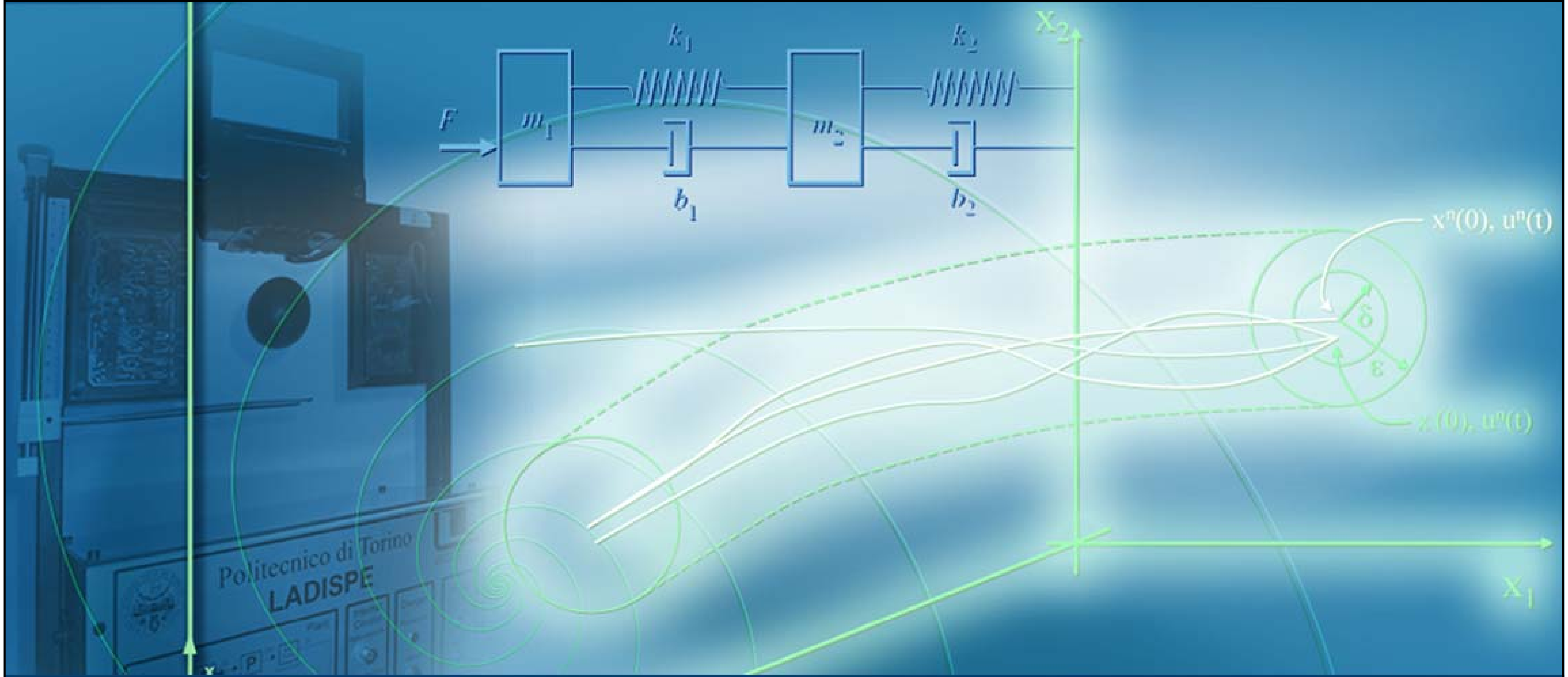


Equilibrio e stabilità di sistemi dinamici

Equilibrio di sistemi dinamici

Equilibrio di sistemi dinamici

- Definizione di equilibrio
- Equilibrio di sistemi a tempo continuo
- Equilibrio di sistemi a tempo discreto
- Esempi di calcolo dell'equilibrio

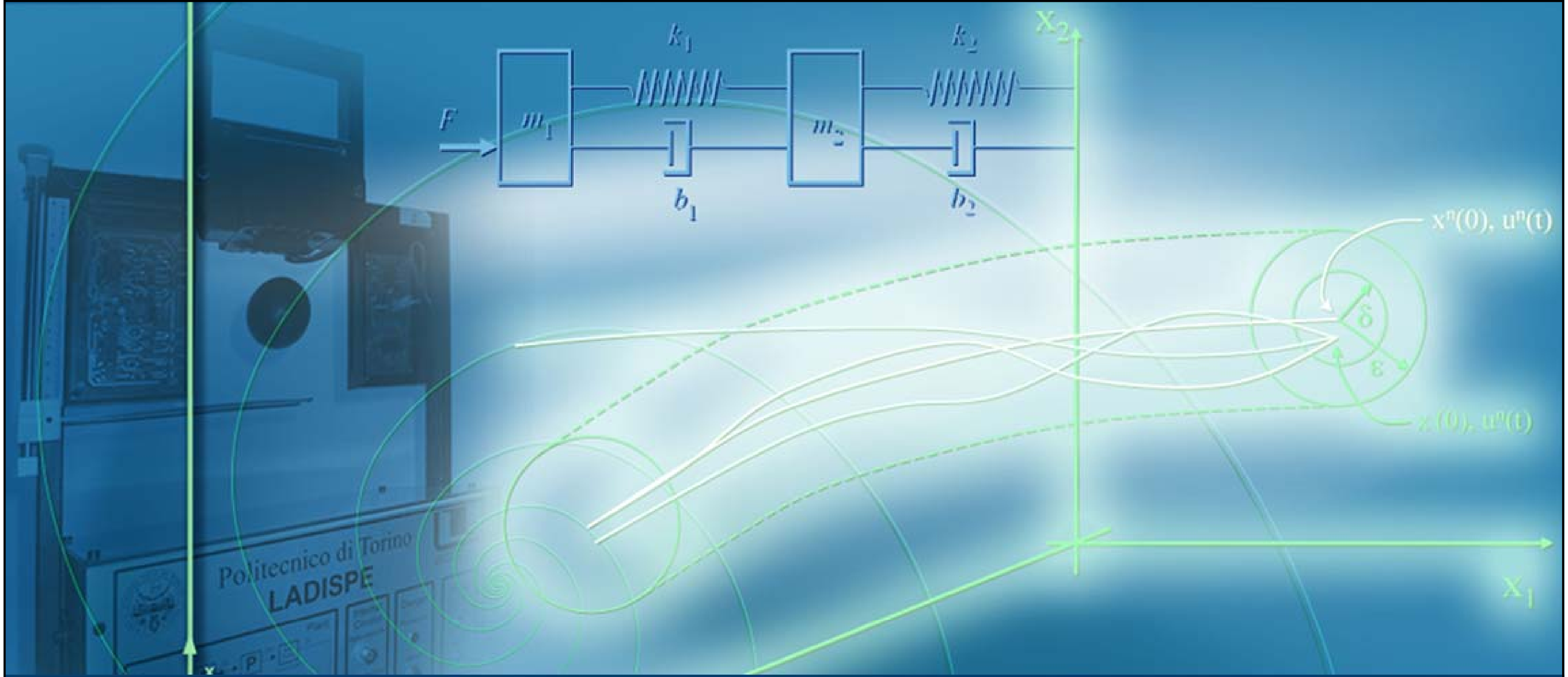


Equilibrio di sistemi dinamici

Definizione di equilibrio

Definizione di equilibrio

- Per **equilibrio** di un sistema dinamico stazionario si intende un particolare movimento costante in cui
  - L'ingresso del sistema è costante: $u(t) = \bar{u} \in \mathbb{R}^p, \forall t \geq 0$
  - Lo stato del sistema permane costante nel tempo e quindi pari allo stato iniziale:
  $$x(t) = x(t = 0) = \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$$
  - L'uscita del sistema è costante: $y(t) = \bar{y} \in \mathbb{R}^q, \forall t \geq 0$
- Terminologia:
  - L'ingresso costante $\bar{u}$ è detto **ingresso di equilibrio**
  - Lo stato costante $\bar{x}$ è detto **stato di equilibrio**
  - L'uscita costante $\bar{y}$ è detta **uscita di equilibrio**
  - La coppia $(\bar{x}, \bar{u})$ è detta **punto di equilibrio**



Equilibrio di sistemi dinamici

Equilibrio di sistemi a tempo continuo

Condizione di equilibrio per sistemi TC

- Dato un sistema dinamico, a dimensione finita, MIMO, a tempo continuo, non lineare, stazionario

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big)$$
$$y(t) = g\big(x(t), u(t)\big)$$

gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso di equilibrio (costante) $u(t) = \bar{u}, \forall t \geq 0$, sono gli stati costanti $x(t) = \bar{x}, \forall t \geq 0$, che soddisfano la condizione

$$\dot{x}(t) = \dot{\bar{x}} = 0, u(t) = \bar{u}, \forall t \geq 0$$

e quindi sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\boxed{f\left(\bar{x}, \bar{u}\right) = 0}$$

cui corrispondono le uscite di equilibrio date da

$$\boxed{\bar{y} = g\left(\bar{x}, \bar{u}\right)}$$

Calcolo dell'equilibrio di sistemi LTI TC (1/3)

- Nel caso di un sistema dinamico, a dimensione finita, MIMO, a tempo continuo, lineare e tempo-invariante
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
gli stati di equilibrio $\bar{x}$ corrispondenti all'ingresso di equilibrio $\bar{u}$ soddisfano la condizione
$$\dot{x}(t) = \dot{\bar{x}} = 0 = A\bar{x} + B\bar{u}, \forall t \geq 0$$
e quindi sono le soluzioni del sistema di equazioni
$$\boxed{A\bar{x} = -B\bar{u}}$$
cui corrispondono le uscite di equilibrio date da
$$\boxed{\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}}$$

Calcolo dell'equilibrio di sistemi LTI TC (2/3)

- Se la matrice A è invertibile (cioè $\det(A) \neq 0$), allora esiste uno ed un solo stato di equilibrio (isolato)

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

cui corrisponde una ed una sola uscita di equilibrio

$$\bar{y} = (-CA^{-1}B + D)\,\bar{u}$$

- Se la matrice A è singolare (cioè $\det(A) = 0$), allora possono esistere infiniti stati di equilibrio oppure nessuno stato di equilibrio, a seconda delle matrici A e B nonché del particolare ingresso di equilibrio $\bar{u}$

Calcolo dell'equilibrio di sistemi LTI TC (3/3)

- Esempio: dato il sistema dinamico LTI a tempo continuo avente matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare tutti gli stati di equilibrio $\bar{x}$ al variare dell'ingresso di equilibrio $\bar{u}$

All'equilibrio, dalle equazioni di stato risulta:

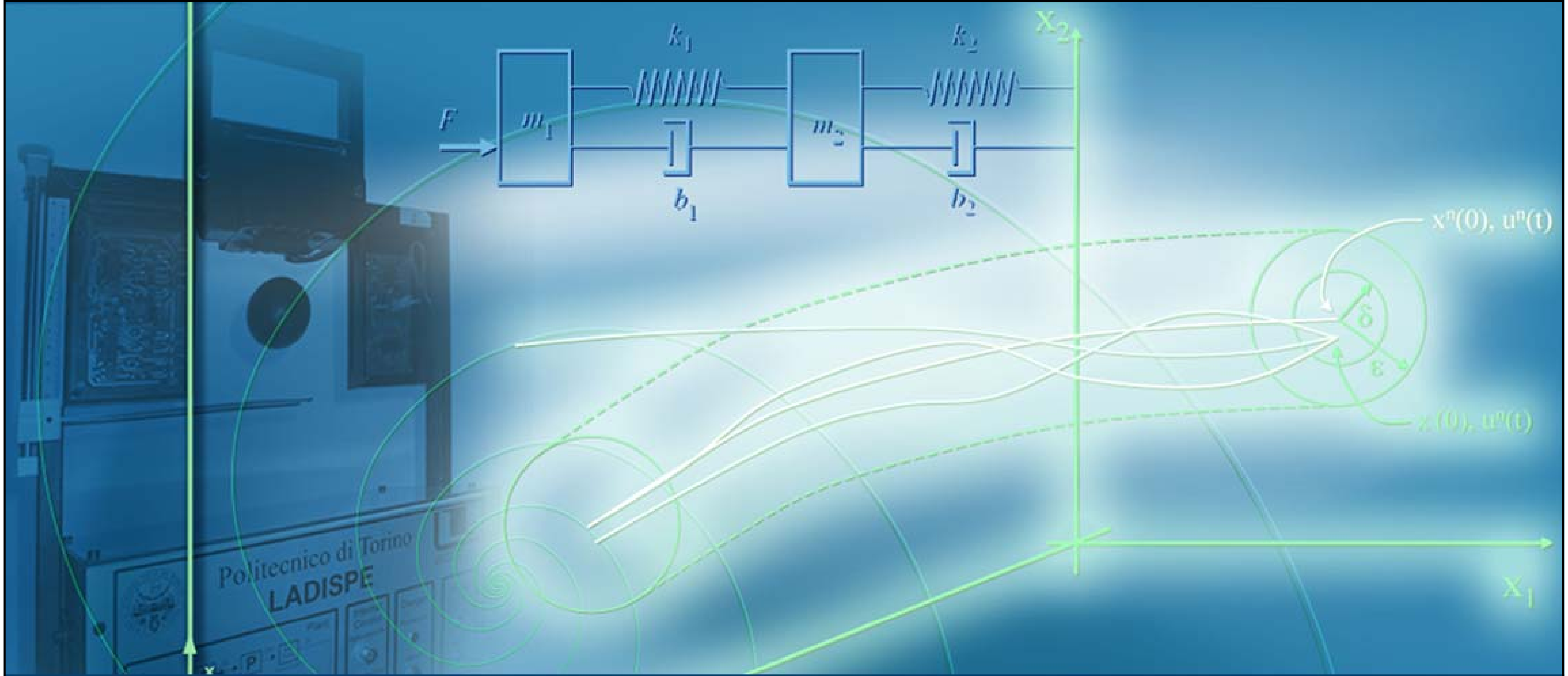
$$\dot{\bar{x}} = 0 = A\bar{x} + B\bar{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = \bar{x}_1 + \bar{u} \\ 0 = \bar{x}_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = -\bar{u} \\ \bar{x}_1 = 0 \end{cases}$$

- se $\bar{u} = 0 \Rightarrow$ esistono infiniti stati di equilibrio dati da

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ si parla in tal caso di stato di equilibrio non isolato

- se $\bar{u} \neq 0 \Rightarrow$ non esiste alcuno stato di equilibrio



Equilibrio di sistemi dinamici

Equilibrio di sistemi a tempo discreto

Condizione di equilibrio per sistemi TD

- Dato un sistema dinamico, a dimensione finita, MIMO, a tempo discreto, non lineare, stazionario
$$x(k+1)=f\big(x(k),u(k)\big)$$
$$y(k)=g\big(x(k),u(k)\big)$$
gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso di equilibrio (costante) $u(k)=\bar{u},\forall k\geq 0$, sono gli stati costanti $x(k)=\bar{x},\forall k\geq 0,$ che soddisfano la condizione
$$x(k+1)=x(k)=\bar{x},\ u(k)=\bar{u},\ \forall k\geq 0$$
e quindi sono le soluzioni del sistema di equazioni
$$\boxed{f\left(\bar{x},\bar{u}\right)=\bar{x}}$$
cui corrispondono le uscite di equilibrio date da
$$\boxed{\bar{y}=g\left(\bar{x},\bar{u}\right)}$$

Calcolo dell'equilibrio di sistemi LTI TD (1/3)

- Nel caso di un sistema dinamico, a dimensione finita, MIMO, a tempo discreto, lineare e tempo-invariante
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$
gli stati di equilibrio $\bar{x}$ corrispondenti all'ingresso di equilibrio $\bar{u}$ soddisfano la condizione
$$x(k+1) = x(k) = \bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u}, \forall k \geq 0$$
e quindi sono le soluzioni del sistema di equazioni
$$\boxed{(I - A)\bar{x} = B\bar{u}}$$
cui corrispondono le uscite di equilibrio date da
$$\boxed{\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}}$$

Calcolo dell'equilibrio di sistemi LTI TD (2/3)

- Se la matrice $I - A$ è invertibile (cioè $\det(I - A) \neq 0$), allora esiste uno ed un solo stato di equilibrio (isolato)

$$\bar{x} = (I - A)^{-1} B\bar{u}$$

cui corrisponde una ed una sola uscita di equilibrio

$$\bar{y} = (C(I - A)^{-1} B + D)\bar{u}$$

- Se la matrice $I - A$ è singolare (cioè $\det(I - A) = 0$), allora possono esistere infiniti stati di equilibrio oppure nessuno stato di equilibrio, a seconda delle matrici A e B nonché del particolare ingresso di equilibrio $\bar{u}$

Calcolo dell'equilibrio di sistemi LTI TD (3/3)

- Esempio: dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto avente matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare tutti gli stati di equilibrio $\bar{x}$ al variare dell'ingresso di equilibrio $\bar{u}$

All'equilibrio, dalle equazioni di stato risulta:

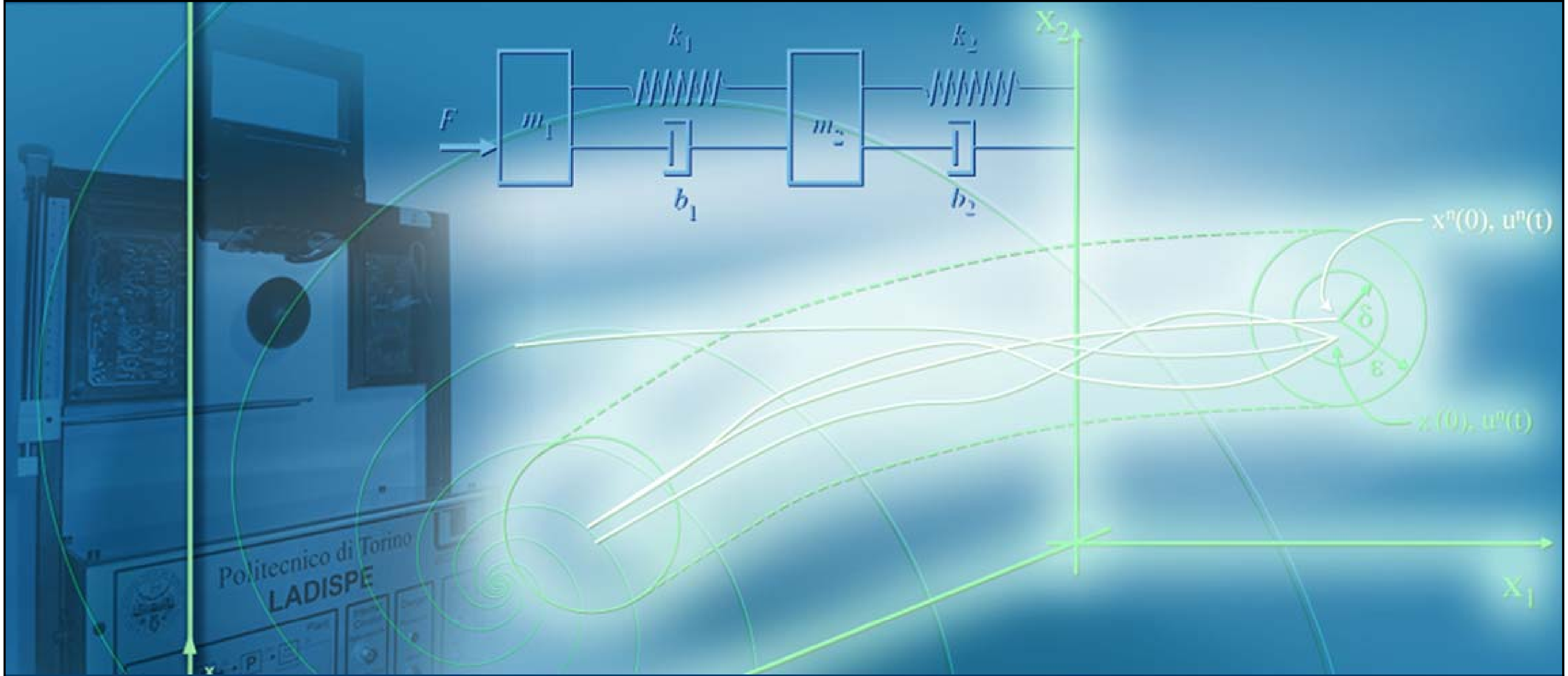
$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_1 + \bar{u} \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{u} = 0 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \end{cases}$$

- se $\bar{u} = 0 \Rightarrow$ esistono infiniti stati di equilibrio dati da

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ si parla in tal caso di stato di equilibrio non isolato

- se $\bar{u} \neq 0 \Rightarrow$ non esiste alcuno stato di equilibrio



Equilibrio di sistemi dinamici

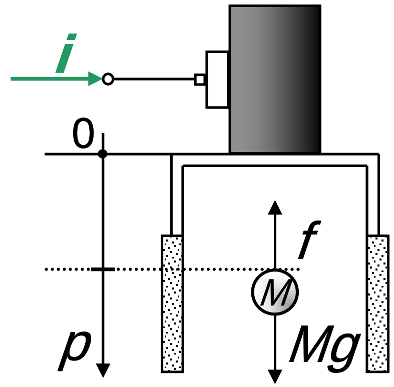
Esempi di calcolo dell’equilibrio

Esempio #1 di calcolo dell'equilibrio (1/2)

- Dato il sistema (levitatore magnetico) descritto dal seguente modello in variabili di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - (k_i/M)\, u^2 / x_1^2 \end{cases}$$
$$y = x_1$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$
$$u(t) = \left[i(t) \right]$$
$$y(t) = \left[p(t) \right]$$



determinare tutti gli stati $\bar{x}$ e le uscite $\bar{y}$ di equilibrio corrispondenti all'ingresso di equilibrio $\bar{u} \neq 0$

- All'equilibrio, $\dot{x}(t) = \dot{\bar{x}} = 0 = f(\bar{x}, \bar{u}), \forall t \geq 0 \Rightarrow$

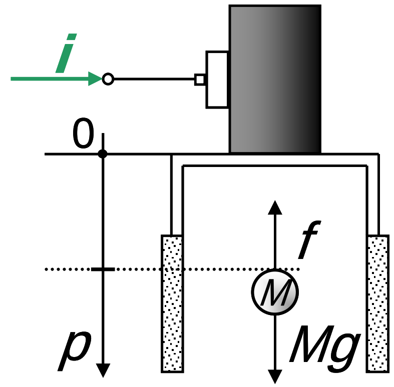
$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = g - (k_i/M)\, \bar{u}^2 / \bar{x}_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \sqrt{\dfrac{k_i}{Mg}}\, |\bar{u}| \\ \bar{x}_2 \;=\; 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{k_i}{Mg}}\, |\bar{u}| \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio #1 di calcolo dell'equilibrio (2/2)

- Dato il sistema (levitatore magnetico) descritto dal seguente modello in variabili di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - (k_i/M)\,u^2/x_1^2 \end{cases} \qquad x(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y = x_1 \qquad u(t) = [\,i(t)\,] \qquad y(t) = [\,p(t)\,]$$



determinare tutti gli stati $\bar{x}$ e le uscite $\bar{y}$ di equilibrio corrispondenti all'ingresso di equilibrio $\bar{u} \neq 0$

- All'equilibrio, $y(t) = \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}), \forall t \geq 0 \Rightarrow$

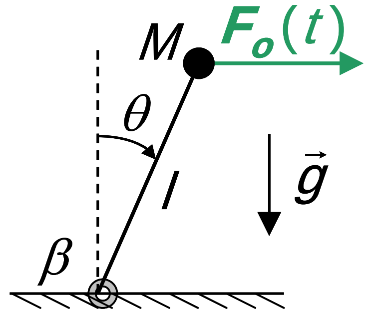
$$\bar{y} = \bar{x}_1 = \sqrt{\frac{k_i}{Mg}}\,|\bar{u}|$$

Esempio #2 di calcolo dell'equilibrio (1/2)

- Dato il sistema (pendolo inverso, con $K = 0$, $F_v = 0$) descritto dal seguente modello in variabili di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u\cos x_1}{Ml} + \dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{\beta x_2}{Ml^2} \end{cases}$$
$$y = x_1$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$
$$u(t) = \left[F_o(t)\right]$$
$$y(t) = \left[\theta(t)\right] = \left[x_1(t)\right]$$



determinare tutti gli stati $\bar{x}$ e le uscite $\bar{y}$ di equilibrio corrispondenti all'ingresso di equilibrio $\bar{u} = 0$

- All'equilibrio, $\dot{x}(t) = \dot{\bar{x}} = 0 = f(\bar{x}, \bar{u}), \forall t \geq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = \dfrac{\bar{u}\cos\bar{x}_1}{Ml} + \dfrac{g}{l}\sin\bar{x}_1 - \dfrac{\beta\bar{x}_2}{Ml^2} = \dfrac{g}{l}\sin\bar{x}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Esempio #2 di calcolo dell'equilibrio (2/2)

Poiché all'equilibrio valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \sin \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = k\pi, \;\; k = 0, \pm 1, \dots \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ esistono infiniti stati di equilibrio (isolati)

$$x = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \;\; k = 0, \pm 1, \dots$$

- All'equilibrio, $y(t) = \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}), \forall t \geq 0 \Rightarrow$

$$\bar{y} = \bar{x}_1 = k\pi, \; k = 0, \pm 1, \dots$$

Esempio #3 di calcolo dell'equilibrio (1/3)

- Dato il sistema dinamico a tempo discreto descritto dal seguente modello in variabili di stato

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)u(k) + x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k+1) = -x_2(k)u(k) + 3x_2^2(k) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k)x_2(k)$$

determinare tutti gli stati $\bar{x}$ e le uscite $\bar{y}$ di equilibrio corrispondenti all'ingresso di equilibrio $\bar{u} = 0.5$

- All'equilibrio, $x(k+1) = x(k) = \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$, $\forall k \geq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_1\bar{u} + \bar{x}_1\bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 = -\bar{x}_2\bar{u} + 3\bar{x}_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1(1 - \bar{u} - \bar{x}_2) = \bar{x}_1(0.5 - \bar{x}_2) = 0 \\ \bar{x}_2(1 + \bar{u} - 3\bar{x}_2) = \bar{x}_2(1.5 - 3\bar{x}_2) = 0 \end{cases}$$

Esempio #3 di calcolo dell'equilibrio (2/3)

Poiché all'equilibrio valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(0.5-\bar{x}_2)=0 \\ \bar{x}_2(1.5-3\bar{x}_2)=0 \end{cases}$$

la seconda equazione risulta soddisfatta per

$$\bar{x}_2^{(a)}=0 \quad \text{oppure} \quad \bar{x}_2^{(b)}=0.5$$

- Se $\bar{x}_2=\bar{x}_2^{(a)}=0$, la prima equazione è soddisfatta per

  $\bar{x}_1=\bar{x}_1^{(a)}=0 \Rightarrow \bar{x}=\bar{x}^{(a)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (stato di eq. isolato)

- Se $\bar{x}_2=\bar{x}_2^{(b)}=0.5$, la prima equazione è soddisfatta per qualsiasi $\bar{x}_1=\bar{x}_1^{(b)}=c\in\mathbb{R}\Rightarrow$

  $\bar{x}=\bar{x}^{(b)}=\begin{bmatrix}c\\0.5\end{bmatrix}$ (stato di eq. non isolato)

Esempio #3 di calcolo dell'equilibrio (3/3)

- All'equilibrio, $y(k) = \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}_1 \bar{x}_2, \; \forall k \geq 0 \;\Rightarrow$
  - Se $\bar{x} = \bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ l'uscita di equilibrio è pari a
$$\bar{y} = \bar{y}^{(a)} = \bar{x}_1^{(a)} \bar{x}_2^{(a)} = 0$$
  - Se $\bar{x} = \bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ 0.5 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ l'uscita di equilibrio è
$$\bar{y} = \bar{y}^{(b)} = \bar{x}_1^{(b)} \bar{x}_2^{(b)} = 0.5c$$