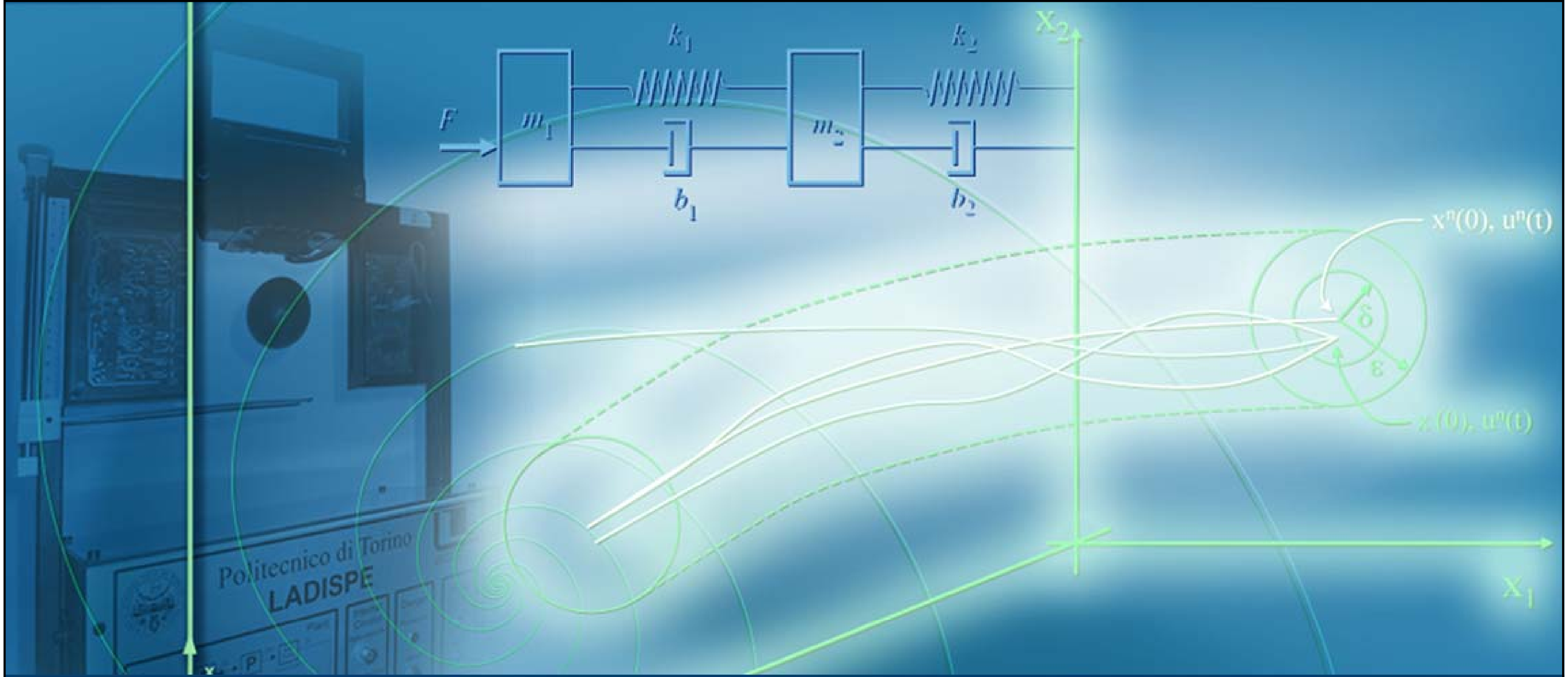
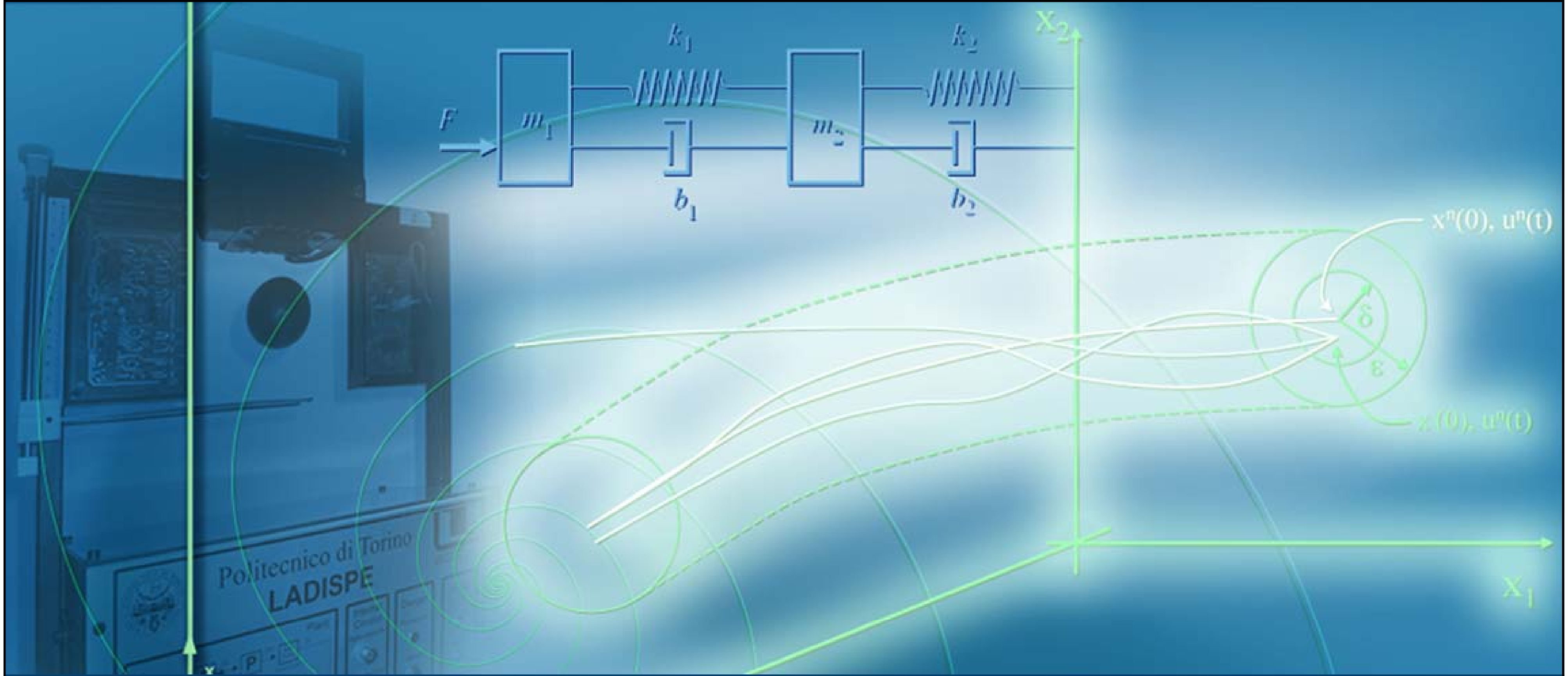


Equilibrio e stabilità di sistemi dinamici

Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

- Introduzione ai criteri di stabilità
- Regola dei segni di Cartesio
- Criterio di Routh-Hurwitz
- Esempi di applicazione del criterio di Routh
- Criterio di Jury
- Esempi di applicazione del criterio di Jury



Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Introduzione ai criteri di stabilità

Introduzione ai criteri di stabilità (1/2)

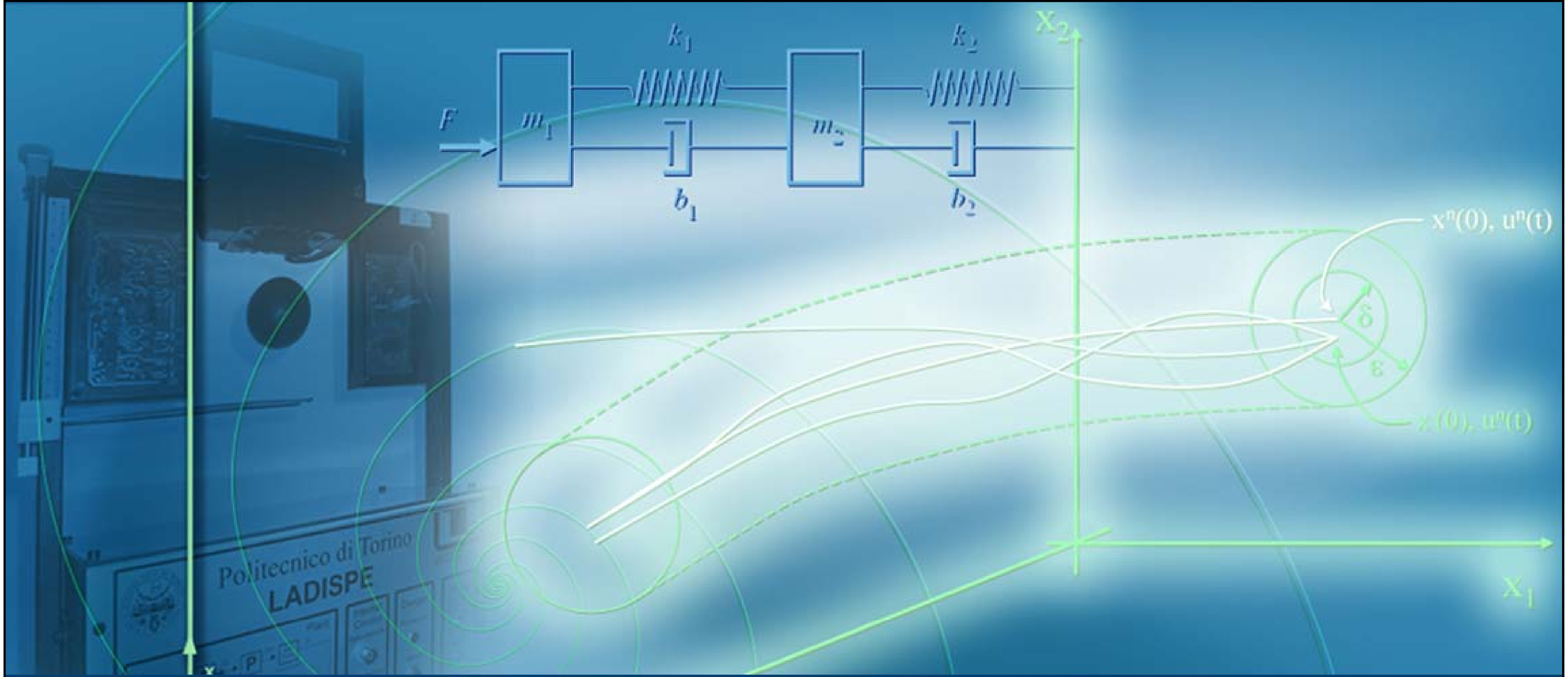
- I criteri fino ad ora considerati per lo studio della stabilità interna di sistemi dinamici, a dimensione finita, MIMO, lineari e stazionari (LTI), richiedono la conoscenza degli autovalori della matrice A di stato del sistema $\Rightarrow$ richiedono il calcolo esplicito delle radici del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$

- I criteri che verranno ora introdotti permettono di studiare la stabilità dei sistemi dinamici LTI senza richiedere il calcolo esplicito delle radici di $p(\lambda)$ $\Rightarrow$ sono di particolare utilità nei casi in cui
  - Non si abbiano a disposizione strumenti di calcolo
  - Il polinomio $p(\lambda)$ dipenda da parametri variabili

Introduzione ai criteri di stabilità (2/2)

- In particolare:
  - La Regola dei segni di Cartesio fornisce in generale solo una condizione necessaria affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano a parte reale strettamente minore di 0
  - Il Criterio di Routh-Hurwitz fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano a parte reale strettamente minore di 0
  - Il Criterio di Jury fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1



Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Regola dei segni di Cartesio

Regola dei segni di Cartesio (1/3)

- Dato il polinomio a coefficienti reali di grado n
$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$
il numero di radici reali **positive** è pari al numero v di variazioni di segno fra coefficienti consecutivi non nulli o è inferiore a v per un multiplo intero di 2
- Esempio:
$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$$
c'è una sola variazione di segno in $p(\lambda) \Rightarrow$ $p(\lambda)$ ha una sola radice reale positiva; infatti
$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$$

Regola dei segni di Cartesio (2/3)

- **Corollario:** dato il polinomio a coefficienti reali

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

il numero di radici reali **negative** è pari al numero w di variazioni di segno fra coefficienti consecutivi non nulli del polinomio $p(-\lambda)$ o è inferiore a w per un multiplo intero di 2

- Esempio:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda+1)^2(\lambda-1) \quad \Rightarrow$$

$$p(-\lambda) = (-\lambda)^3 + (-\lambda)^2 - (-\lambda) - 1 = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$$

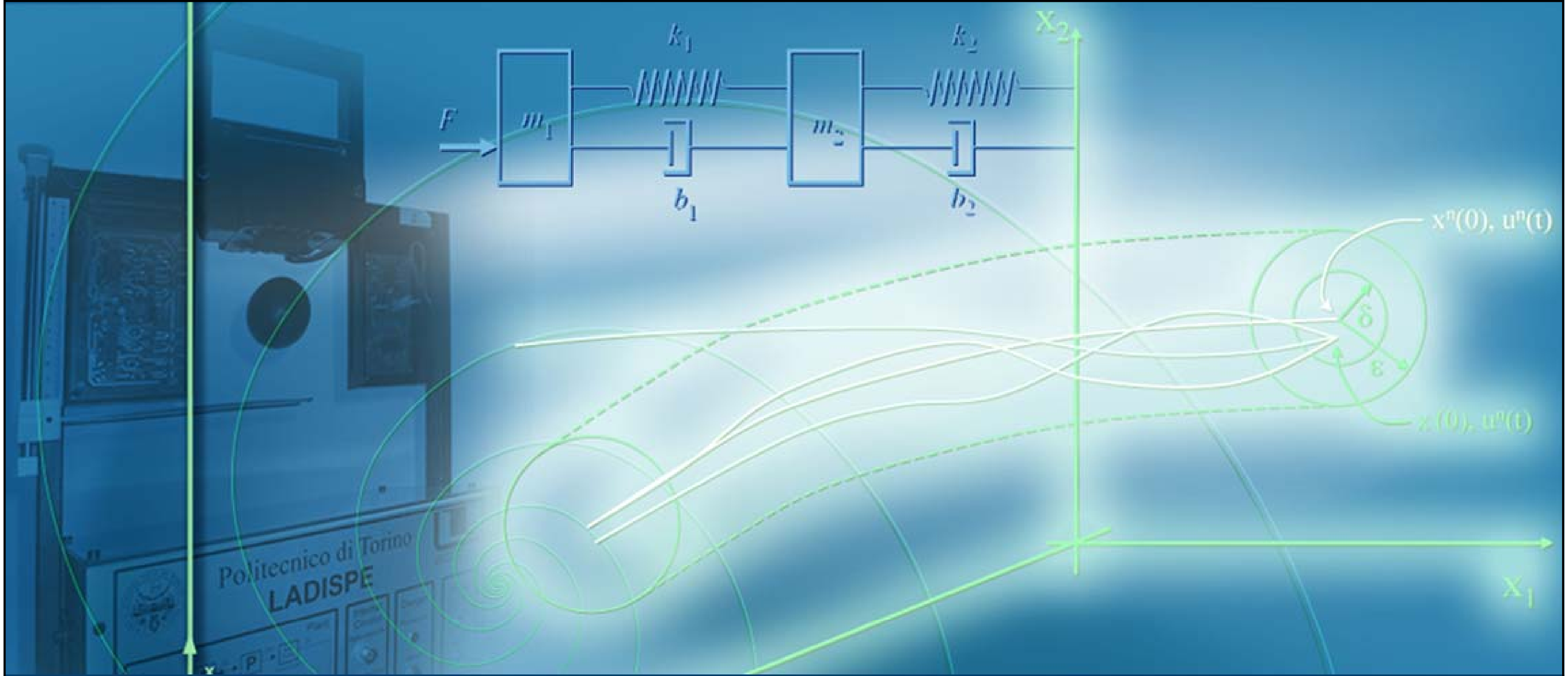
ci sono 2 variazioni di segno in $p(-\lambda) \Rightarrow$
$p(\lambda)$ ha 2 o 0 radici reali negative

Regola dei segni di Cartesio (3/3)

- Condizione necessaria ma in generale non sufficiente affinché $p(\lambda)$ abbia tutte le n radici a parte reale strettamente negativa è che non ci siano variazioni di segno fra coefficienti consecutivi non nulli
- **Caso particolare:** nel caso $n=2$

$$p(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

condizione necessaria e sufficiente affinché $p(\lambda)$ abbia entrambe le radici a parte reale strettamente negativa è che i 3 coefficienti a_2, a_1 e a_0 siano di segno concorde (cioè tutti > 0 oppure tutti < 0) e quindi non presentino alcuna variazione di segno



Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Criterio di Routh-Hurwitz

Criterio di Routh-Hurwitz (1/3)

- **Premessa:** condizione necessaria affinché tutte le n radici del polinomio a coefficienti reali di grado n
$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$
siano a parte reale strettamente minore di 0 è che tutti gli $n+1$ coefficienti a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 siano di segno concorde (cioè tutti > 0 oppure tutti < 0)
- Il **criterio di Routh** si esprime con riferimento al segno degli elementi della prima colonna della **tabella di Routh** avente le seguenti caratteristiche:
  - È costituita in generale da $n+1$ righe
  - Gli elementi delle prime due righe sono costituiti dai coefficienti di $p(\lambda)$, opportunamente distribuiti
  - L'ultima riga è costituita dal coefficiente a_0 di $p(\lambda)$

Criterio di Routh-Hurwitz (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots
\end{array}$$

Criterio di Routh-Hurwitz (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \cdots
\end{array}$$

$$b_{n-2} = -\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \Big/ a_{n-1}$$

Criterio di Routh-Hurwitz (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \cdots
\end{array}$$

$$b_{n-2} = -\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \Big/ a_{n-1}, \quad b_{n-4} = -\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \Big/ a_{n-1}, \ldots$$

Criterio di Routh-Hurwitz (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \cdots \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & c_{n-7} & \cdots
\end{array}$$

$$b_{n-2} = -\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \Big/ a_{n-1}, \quad b_{n-4} = -\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \Big/ a_{n-1}, \ldots$$

$$c_{n-3} = -\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix} \Big/ b_{n-2}$$

Criterio di Routh-Hurwitz (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \cdots \\
n-3 & c_{n-3} & {\color{red}c_{n-5}} & c_{n-7} & \cdots
\end{array}$$

$$b_{n-2} = -\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \Big/ a_{n-1}, \; b_{n-4} = -\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \Big/ a_{n-1}, \ldots$$

$$c_{n-3} = -\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix} \Big/ b_{n-2}, \; {\color{red}c_{n-5}} = -\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix} \Big/ b_{n-2}, \ldots$$

Criterio di Routh-Hurwitz (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \cdots \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & c_{n-7} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}$$

$$b_{n-2} = -\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \Big/ a_{n-1},\ b_{n-4} = -\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \Big/ a_{n-1},\ \ldots$$

$$c_{n-3} = -\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix} \Big/ b_{n-2},\ c_{n-5} = -\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix} \Big/ b_{n-2},\ \ldots$$

Criterio di Routh-Hurwitz (3/3)

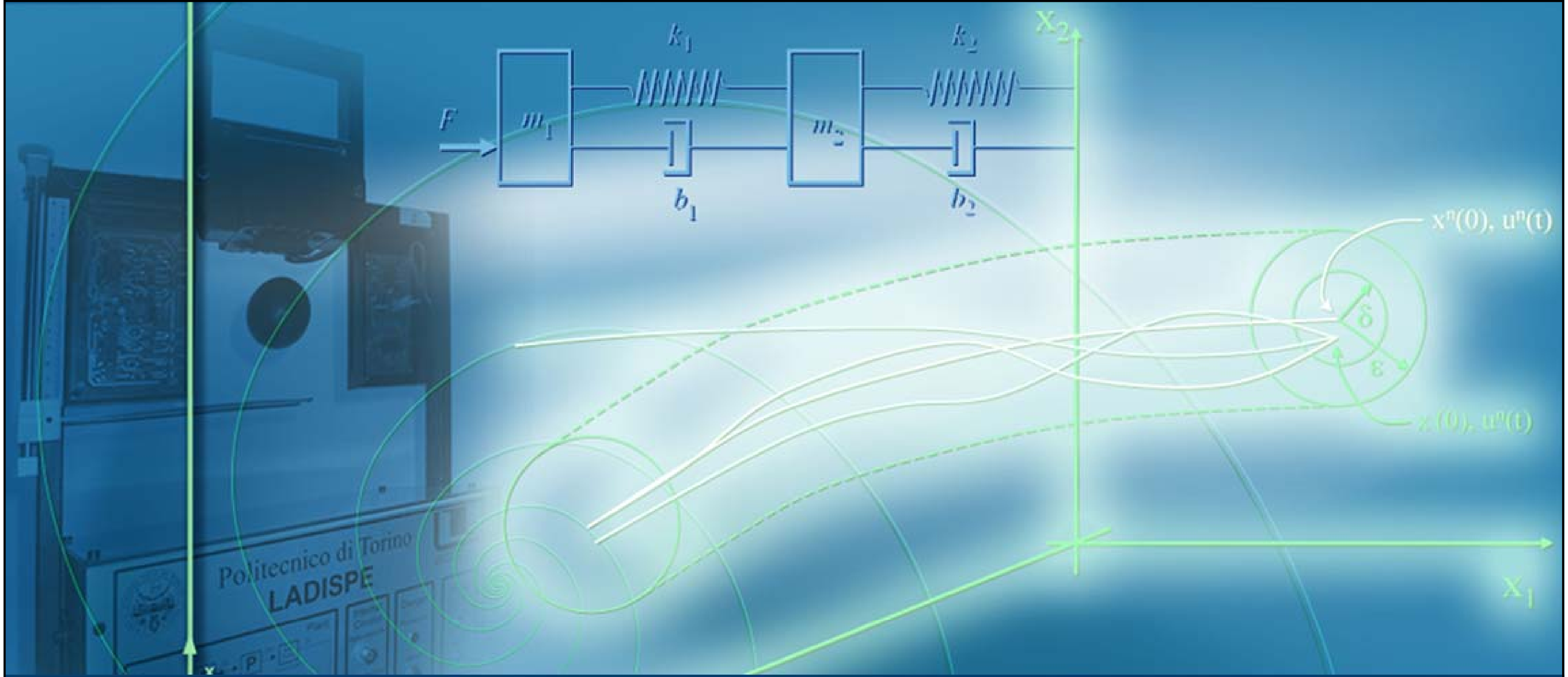
$$
\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \cdots \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & c_{n-7} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}
$$

- **Criterio di Routh-Hurwitz:**
  condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano a parte reale strettamente minore di 0 è che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano di segno concorde (cioè tutti > 0 oppure tutti < 0)

Corollario del criterio di Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|c c c c}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \cdots \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & c_{n-7} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}$$

- **Corollario del criterio di Routh-Hurwitz:** se la tabella di Routh può essere completata (cioè nessun elemento della sua prima colonna è nullo):
  - Nessuna radice di $p(\lambda)$ ha parte reale nulla
  - Il numero di radici di $p(\lambda)$ a parte reale strettamente maggiore di 0 è dato dal numero delle variazioni di segno presenti nella prima colonna della tabella



Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Esempi di applicazione del criterio di Routh

Esempio #1 (1/6)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$
$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 1$$
analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & 8 & 1 & 0 & \cdots \\
3 & 6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & b_2 & b_0 & b_{-2} & \cdots & \cdots \\
1 & c_1 & c_{-1} & c_{-3} & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$b_2 = -\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \Big/ 6 = -(1-48)/6 = 47/6$$

Esempio #1 (2/6)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$
$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 1$$
analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & 8 & 1 & 0 & \cdots \\
3 & 6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & 47/6 & b_0 & b_{-2} & \cdots & \cdots \\
1 & c_1 & c_{-1} & c_{-3} & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$b_0 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \Big/ 6 = -(0-6)/6 = 1$$

Esempio #1 (3/6)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & 8 & 1 & 0 & \cdots \\
3 & 6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & 47/6 & 1 & b_{-2} & \cdots & \cdots \\
1 & c_1 & c_{-1} & c_{-3} & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$b_{-2} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \Big/ 6 = 0 = b_{-4} = \dots$$

Esempio #1 (4/6)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & 8 & 1 & 0 & \cdots \\
3 & 6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & 47/6 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\
1 & c_1 & c_{-1} & c_{-3} & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$c_1 = -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 47/6 & 1 \end{vmatrix} \Big/ 47/6 = -\frac{6 - 47/6}{47/6} = 11/47$$

Esempio #1 (5/6)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$
$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 1$$
analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & 8 & 1 & 0 & \cdots \\
3 & 6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & 47/6 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\
1 & 11/47 & c_{-1} & c_{-3} & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$c_{-1} = -\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 47/6 & 0 \end{vmatrix} \Big/ 47/6 = 0 = c_{-3} = \ldots$$

Esempio #1 (6/6)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & \boxed{1} & 8 & 1 & 0 & \cdots \\
3 & 6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & 47/6 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 11/47 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & a_0 = 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}$$

- Tutti gli elementi della prima colonna sono concordi $\Rightarrow$ tutte le radici di $p(\lambda)$ sono a parte reale < 0

Esempio #2 (1/5)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$
$$p(\lambda) = 0.2\lambda^3 + 1.2\lambda^2 + 1.2$$
analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh
- Non tutti i coefficienti di $p(\lambda)$ sono di segno concorde poiché $a_1 = 0$
$\Rightarrow$ non tutte le radici di $p(\lambda)$ sono a parte reale < 0

Esempio #2 (2/5)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 0.2\lambda^3 + 1.2\lambda^2 + 1.2$$

  analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 0.2 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 1.2 & 1.2 & 0 & \cdots \\ 1 & b_1 & b_{-1} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_0 = 1.2 & 0 & \cdots & \cdots \end{array}$$

$$b_1 = -\begin{vmatrix} 0.2 & 0 \\ 1.2 & 1.2 \end{vmatrix} \Big/ 1.2 = -(0.24 - 0)/1.2 = -0.2$$

Esempio #2 (3/5)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$
$$p(\lambda) = 0.2\lambda^3 + 1.2\lambda^2 + 1.2$$
analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 0.2 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & 1.2 & 1.2 & 0 & \cdots \\
1 & -0.2 & b_{-1} & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = 1.2 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$b_{-1} = -\begin{vmatrix} 0.2 & 0 \\ 1.2 & 0 \end{vmatrix} \Big/ 1.2 = 0 = b_{-3} = \ldots$$

Esempio #2 (4/5)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$
$$p(\lambda) = 0.2\lambda^3 + 1.2\lambda^2 + 1.2$$
analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 0.2 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & 1.2 & 1.2 & 0 & \cdots \\
1 & -0.2 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & a_0 = 1.2 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}$$

- Ci sono due variazioni di segno nella prima colonna $\Rightarrow$ due radici di $p(\lambda)$ sono a parte reale > 0

Esempio #2 (5/5)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$
$$p(\lambda) = 0.2\lambda^3 + 1.2\lambda^2 + 1.2$$
analizzarne le radici mediante il solo criterio di Routh
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 0.2 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 1.2 & 1.2 & 0 & \cdots \\ 1 & -0.2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 = 1.2 & 0 & 0 & \cdots \end{array}$$

- Non ci sono elementi nulli nella prima colonna
$\Rightarrow$ nessuna radice di $p(\lambda)$ è a parte reale nulla
$\Rightarrow$ solo una radice di $p(\lambda)$ è a parte reale < 0

Esempio #3

- Dato il seguente polinomio a coefficienti reali $a_i \neq 0$

$$p(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

  analizzarne le radici solo mediante il criterio di Routh
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & a_2 & a_0 & \cdots \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 & 0 & \cdots \end{array}$$

- La prima colonna della tabella è data esattamente dai coefficienti del polinomio $p(\lambda) \Rightarrow$
  il criterio e il corollario di Routh-Hurwitz dimostrano la regola di Cartesio per polinomi di II grado

Esempio #4 (1/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$
per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?
- Condizione necessaria è che tutti i coefficienti di $p(\lambda)$ siano di segno concorde $\Rightarrow$
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\; a_4 = 1 > 0, \forall k \\ \bullet\; a_3 = 6 > 0, \forall k \\ \bullet\; a_2 = 8 > 0, \forall k \\ \bullet\; a_1 = k > 0 \\ \bullet\; a_0 = k > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; k > 0$$
- Per avere una condizione necessaria e sufficiente, occorre calcolare la tabella di Routh

Esempio #4 (2/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$

per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & 8 & k & 0 & \cdots \\
3 & 6 & k & 0 & 0 & \cdots \\
2 & b_2 & b_0 & b_{-2} & \cdots & \cdots \\
1 & c_1 & c_{-1} & c_{-3} & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = k & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$b_2 = -\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 6 & k \end{vmatrix} \Big/ 6 = -(k-48)/6 = \frac{48-k}{6}$$

Esempio #4 (3/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$
per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & 8 & k & 0 & \cdots \\
3 & 6 & k & 0 & 0 & \cdots \\
2 & \dfrac{48-k}{6} & b_0 & b_{-2} & \cdots & \cdots \\
1 & c_1 & c_{-1} & c_{-3} & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = k & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$b_0 = -\begin{vmatrix} 1 & k \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \Big/ 6 = -(0-6k)/6 = k$$

Esempio #4 (4/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$
per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & 8 & k & 0 & \cdots \\
3 & 6 & k & 0 & 0 & \cdots \\
2 & \dfrac{48-k}{6} & k & b_{-2} & \cdots & \cdots \\
1 & c_1 & c_{-1} & c_{-3} & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = k & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

$$b_{-2} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \Big/ 6 = 0 = b_{-4} = \ldots$$

Esempio #4 (5/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$
per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & 8 & k & 0 & \cdots \\
3 & 6 & k & 0 & 0 & \cdots \\
2 & \dfrac{48-k}{6} & k & 0 & \cdots & \cdots \\
1 & c_1 & c_{-1} & c_{-3} & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = k & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$c_1 = -\begin{vmatrix} 6 & k \\ \dfrac{48-k}{6} & k \end{vmatrix} \Bigg/ \frac{48-k}{6} = -\frac{36k-(48-k)k}{48-k} = \frac{(12-k)k}{48-k}$$

Esempio #4 (6/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$
per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & 8 & k & 0 & \cdots \\
3 & 6 & k & 0 & 0 & \cdots \\
2 & \dfrac{48-k}{6} & k & 0 & \cdots & \cdots \\
1 & \dfrac{(12-k)k}{48-k} & c_{-1} & c_{-3} & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = k & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$c_{-1} = -\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ \dfrac{48-k}{6} & 0 \end{vmatrix} \Big/ \dfrac{48-k}{6} = 0 = c_{-3} = \ldots$$

Esempio #4 (7/9)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + k\lambda + k$$
per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & \boxed{1} & 8 & k & 0 & \cdots \\
3 & 6 & k & 0 & 0 & \cdots \\
2 & \dfrac{48-k}{6} & k & 0 & 0 & \cdots \\
1 & \dfrac{(12-k)k}{48-k} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & a_0 = k & 0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}$$

$\Rightarrow$ occorre vedere per quali k tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono concordi

Esempio #4 (8/9)

$$
\begin{array}{c|c|cccc}
4 & 1 & 8 & k & 0 & \cdots \\
3 & 6 & k & 0 & 0 & \cdots \\
2 & \dfrac{48-k}{6} & k & 0 & 0 & \cdots \\
1 & \dfrac{(12-k)k}{48-k} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & a_0 = k & 0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}
$$

- $1 > 0, \ \forall k$
- $6 > 0, \ \forall k$
- $(48-k)/6 > 0 \Rightarrow k < 48$
- $\dfrac{(12-k)k}{48-k} > 0 \Rightarrow (12-k)k > 0,$ poiché $k < 48 \Rightarrow 0 < k < 12$
- $a_0 = k > 0 \Rightarrow k > 0$

Esempio #4 (9/9)

- Tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono di segno concorde (e in particolare > 0) per

$$0 < k < 12$$

$\Rightarrow$ per tali valori di k le radici del polinomio $p(\lambda)$ sono tutte a parte reale strettamente negativa

Esempio #5 (1/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = \lambda^3 + k\lambda^2 + (15k+1)\lambda + 50k$$
per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?
- Condizione necessaria è che tutti i coefficienti di $p(\lambda)$ siano di segno concorde $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_3 = 1 > 0, \forall k \\ \bullet\ a_2 = k > 0 \\ \bullet\ a_1 = 15k + 1 > 0 \Rightarrow k > -1/15 \\ \bullet\ a_0 = 50k > 0 \Rightarrow k > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k > 0$$

- Per avere una condizione necessaria e sufficiente, occorre calcolare la tabella di Routh

Esempio #5 (2/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = \lambda^3 + k\lambda^2 + (15k+1)\lambda + 50k$$
per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & 15k+1 & 0 & \cdots \\
2 & k & 50k & 0 & \cdots \\
1 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = 50k & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$b_1 = -\begin{vmatrix} 1 & 15k+1 \\ k & 50k \end{vmatrix} \Big/ k = -\frac{50k - k(15k+1)}{k} = 15k - 49$$

Esempio #5 (3/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^3 + k\lambda^2 + (15k+1)\lambda + 50k$$

per quali k le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|c|cccc} 3 & 1 & 15k+1 & 0 & \cdots \\ 2 & k & 50k & 0 & \cdots \\ 1 & 15k-49 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 = 50k & 0 & 0 & \cdots \end{array}$$

$\Rightarrow$ occorre vedere per quali valori di k tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono di segno concorde

Esempio #5 (4/4)

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$
\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & 15k+1 & 0 & \cdots \\
2 & k & 50k & 0 & \cdots \\
1 & 15k-49 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = 50k & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\bullet\, 1 > 0,\ \forall k \\
\bullet\, k > 0 \\
\bullet\, 15k - 49 > 0 \Rightarrow k > 49/15 \\
\bullet\, a_0 = 50k > 0
\end{array}
\right\} \Rightarrow k > 49/15 = 3.2\overline{6}
$$

$\Rightarrow$ per $k > 49/15$ le radici del polinomio $p(\lambda)$ sono tutte a parte reale strettamente positiva

Esempio #6 (1/7)

- Dato il seguente polinomio in cui i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + (\alpha+5)\lambda^2 + 2\lambda + \beta + 3$$
per quali α, β le radici sono tutte a parte reale < 0 ?
- Condizione necessaria è che tutti i coefficienti di $p(\lambda)$ siano di segno concorde $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_4 = 1 > 0, \forall\alpha, \forall\beta \\ \bullet\ a_3 = 1 > 0, \forall\alpha, \forall\beta \\ \bullet\ a_2 = \alpha + 5 > 0 \Rightarrow \alpha > -5 \\ \bullet\ a_1 = 2 > 0, \forall\alpha, \forall\beta \\ \bullet\ a_0 = \beta + 3 > 0 \Rightarrow \beta > -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > -5 \\ \beta > -3 \end{cases}$$

- Per avere una condizione necessaria e sufficiente, occorre calcolare la tabella di Routh

Esempio #6 (2/7)

- Dato il seguente polinomio in cui i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + (\alpha + 5)\lambda^2 + 2\lambda + \beta + 3$$

per quali α, β le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & \alpha+5 & \beta+3 & 0 & \cdots \\
3 & 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & b_2 & b_0 & 0 & \cdots & \cdots \\
1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = \beta+3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$b_2 = -\begin{vmatrix} 1 & \alpha+5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \Big/ 1 = -\left(2 - (\alpha+5)\right) = \alpha + 3$$

Esempio #6 (3/7)

- Dato il seguente polinomio in cui i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + (\alpha+5)\lambda^2 + 2\lambda + \beta + 3$$

per quali α, β le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccccc}
4 & 1 & \alpha+5 & \beta+3 & 0 & \cdots \\
3 & 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & \alpha+3 & b_0 & 0 & \cdots & \cdots \\
1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & a_0{=}\beta{+}3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$b_0 = -\begin{vmatrix} 1 & \beta+3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \Big/ 1 = \beta+3$$

Esempio #6 (4/7)

- Dato il seguente polinomio in cui i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + (\alpha + 5)\lambda^2 + 2\lambda + \beta + 3$$

per quali α, β le radici sono tutte a parte reale < 0 ?

- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc}
4 & 1 & \alpha+5 & \beta+3 & 0 & \cdots \\
3 & 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & \alpha+3 & \beta+3 & 0 & \cdots & \cdots \\
1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & a_0 = \beta+3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$c_1 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \alpha+3 & \beta+3 \end{vmatrix} \Big/ (\alpha+3) = -\frac{\beta+3-2(\alpha+3)}{\alpha+3} = \frac{2\alpha-\beta+3}{\alpha+3}$$

Esempio #6 (5/7)

- Dato il seguente polinomio in cui i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + (\alpha + 5)\lambda^2 + 2\lambda + \beta + 3$$
per quali α, β le radici sono tutte a parte reale < 0 ?
- La tabella di Routh corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccccc} 4 & \boxed{1} & \alpha+5 & \beta+3 & 0 & \cdots \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & \alpha+3 & \beta+3 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & \dfrac{2\alpha-\beta+3}{\alpha+3} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_0=\beta+3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{array}$$

$\Rightarrow$ occorre vedere per quali α, β tutti gli elementi della prima colonna della tabella sono concordi

Esempio #6 (6/7)

$$
\begin{array}{c|cccccc}
4 & 1 & \alpha+5 & \beta+3 & 0 & \cdots \\
3 & 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & \alpha+3 & \beta+3 & 0 & \cdots & \cdots \\
1 & \dfrac{2\alpha-\beta+3}{\alpha+3} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & a_0=\beta+3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

- $1 > 0, \ \forall\alpha, \ \forall\beta$
- $1 > 0, \ \forall\alpha, \ \forall\beta$
- $\alpha+3>0 \Rightarrow \alpha>-3$
- $\dfrac{2\alpha-\beta+3}{\alpha+3}>0 \Rightarrow 2\alpha-\beta+3>0,$ poiché $\alpha>-3 \Rightarrow \beta<2\alpha+3$
- $a_0=\beta+3>0 \Rightarrow \beta>-3$

Esempio #6 (7/7)

- Tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono di segno concorde (e in particolare > 0) per

$$\{ -3 < \beta < 2\alpha + 3 \} \quad \wedge \quad \{ \alpha > -3 \}$$

$\Rightarrow$ per tali valori di α, β le radici del polinomio $p(\lambda)$ sono tutte a parte reale strettamente negativa

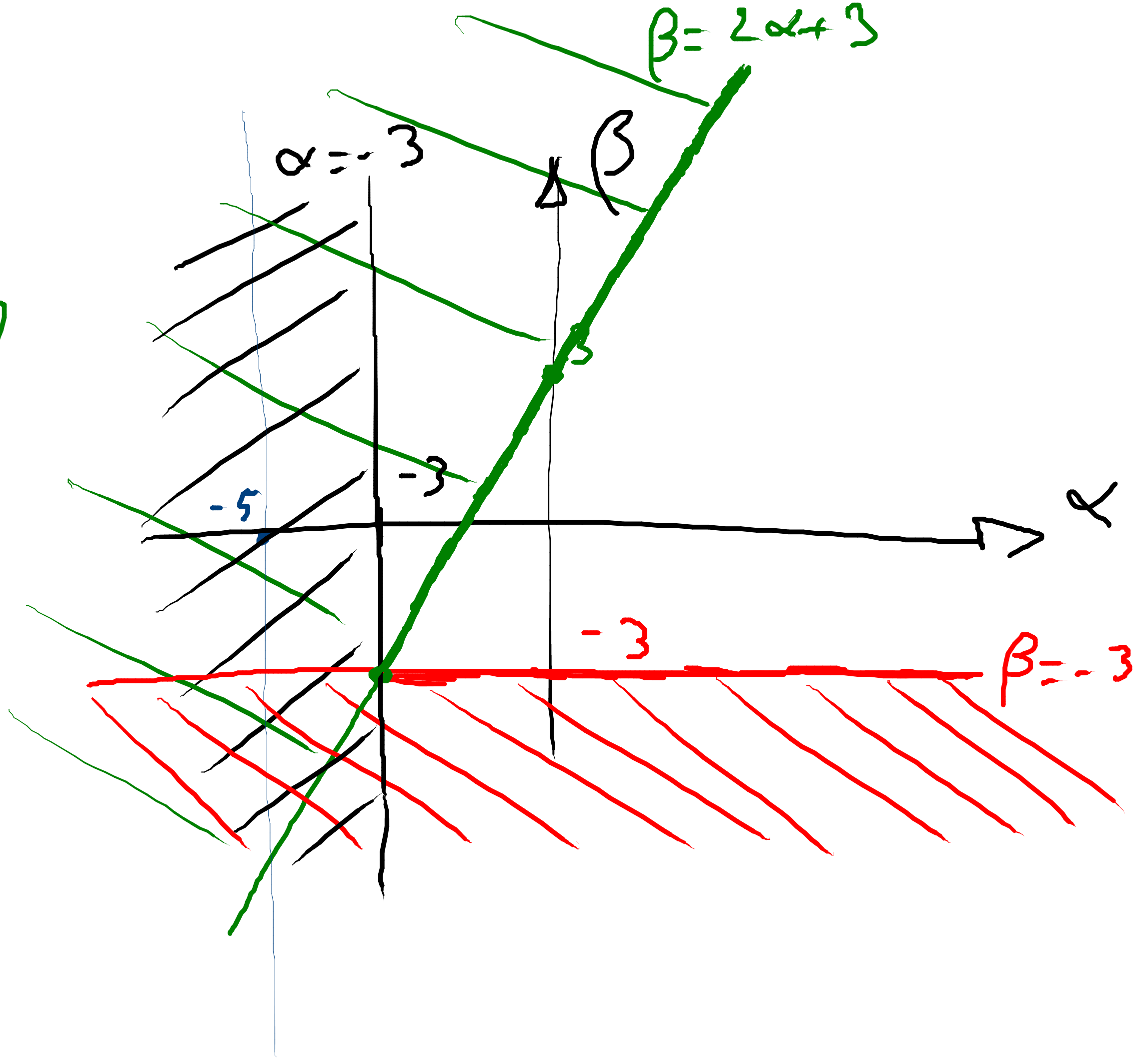
- Rappresentando geometricamente i vari vincoli sul piano cartesiano (α, β), si vede che il vincolo $\alpha > -3$ è già automaticamente soddisfatto dalla condizione

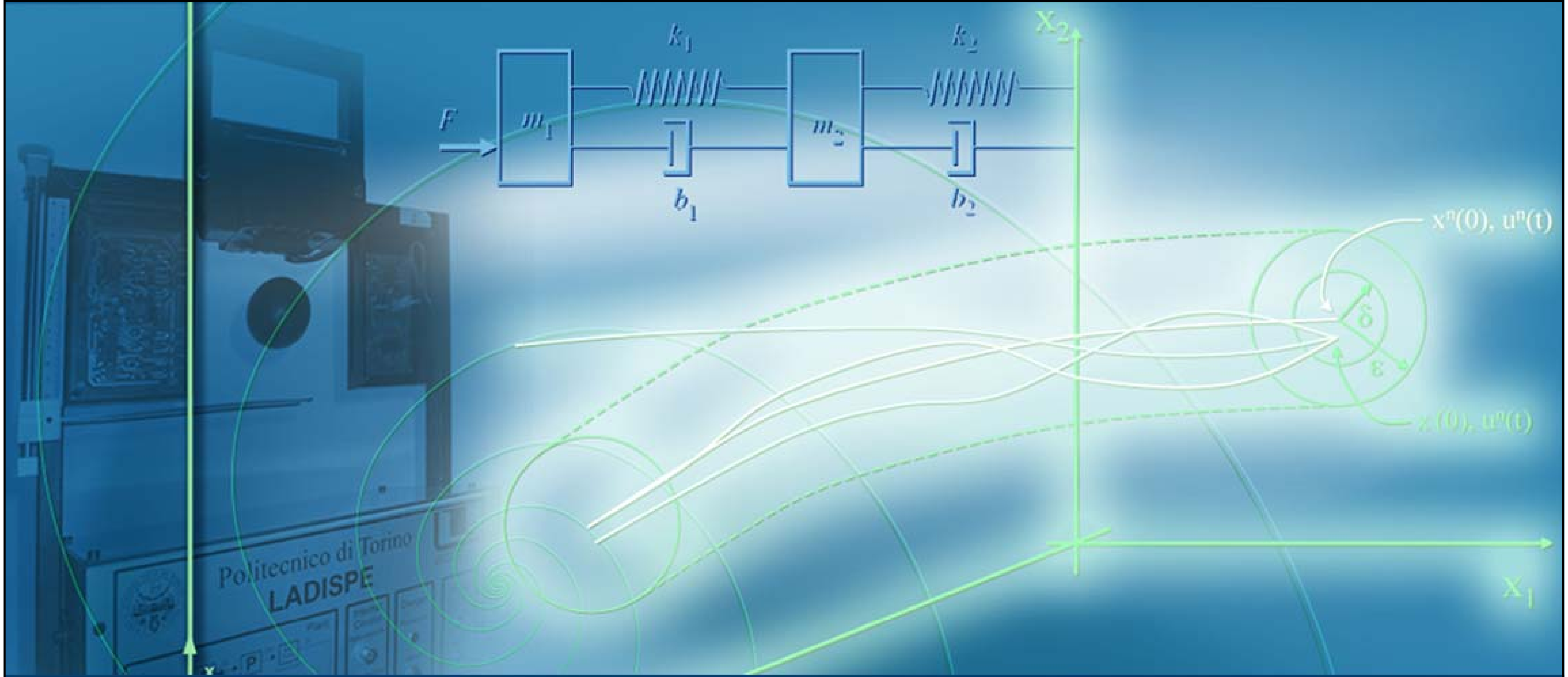
$$-3 < \beta < 2\alpha + 3$$

$\alpha > -3$

$\boxed{\beta < 2\alpha + 3}$

$\boxed{\beta > -3}$





Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Criterio di Jury

Criterio di Jury (1/3)

- Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le n radici del polinomio a coefficienti reali di grado n
$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$
siano in modulo strettamente minori di 1 è che
  - Nel caso $n=2$, siano soddisfatte 3 disuguaglianze:
    1) $p(\lambda = 1) > 0$
    2) $(-1)^n p(\lambda = -1) > 0$
    3) $|a_n| > |a_0|$
  - Nel caso $n>2$, oltre alle 3 precedenti disuguaglianze, siano soddisfatte anche altre $n-2$ disuguaglianze fra i moduli di alcuni elementi della **tabella di Jury** seguente, costituita da $n-1$ coppie di righe

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0
\end{array}$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} &
\end{array}$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & b_0 & {\color{red}b_1} & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} &
\end{array}$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, \quad {\color{red}b_1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} &
\end{array}$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-2} \\ a_n & a_2 \end{vmatrix}$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} &
\end{array}$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, \; b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}, \; b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-2} \\ a_n & a_2 \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\ldots, \; b_{n-2} = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} &
\end{array}$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix},\ b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix},\ b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-2} \\ a_n & a_2 \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\ldots,\ b_{n-2} = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix},\ b_{n-1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & \\
n-1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 &
\end{array}$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & \\
n-1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & \\
n-2 & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & &
\end{array}$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & \\
n-1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & \\
n-2 & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & &
\end{array}$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}, \quad c_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_1 \end{vmatrix}$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & \\
n-1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & \\
n-2 & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & {\color{red}c_{n-2}} & &
\end{array}$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix},\ c_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_1 \end{vmatrix}, \ldots, {\color{red}c_{n-2}} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ b_{n-1} & b_{n-2} \end{vmatrix}$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & \\
n-1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & \\
n-2 & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & & \\
n-2 & c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \cdots & c_0 & &
\end{array}$$

Criterio di Jury (2/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & \\
n-1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & \\
n-2 & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & & \\
n-2 & c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \cdots & c_0 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\
2 & z_0 & z_1 & z_2 & & & & \\
2 & z_2 & z_1 & z_0 & & & &
\end{array}$$

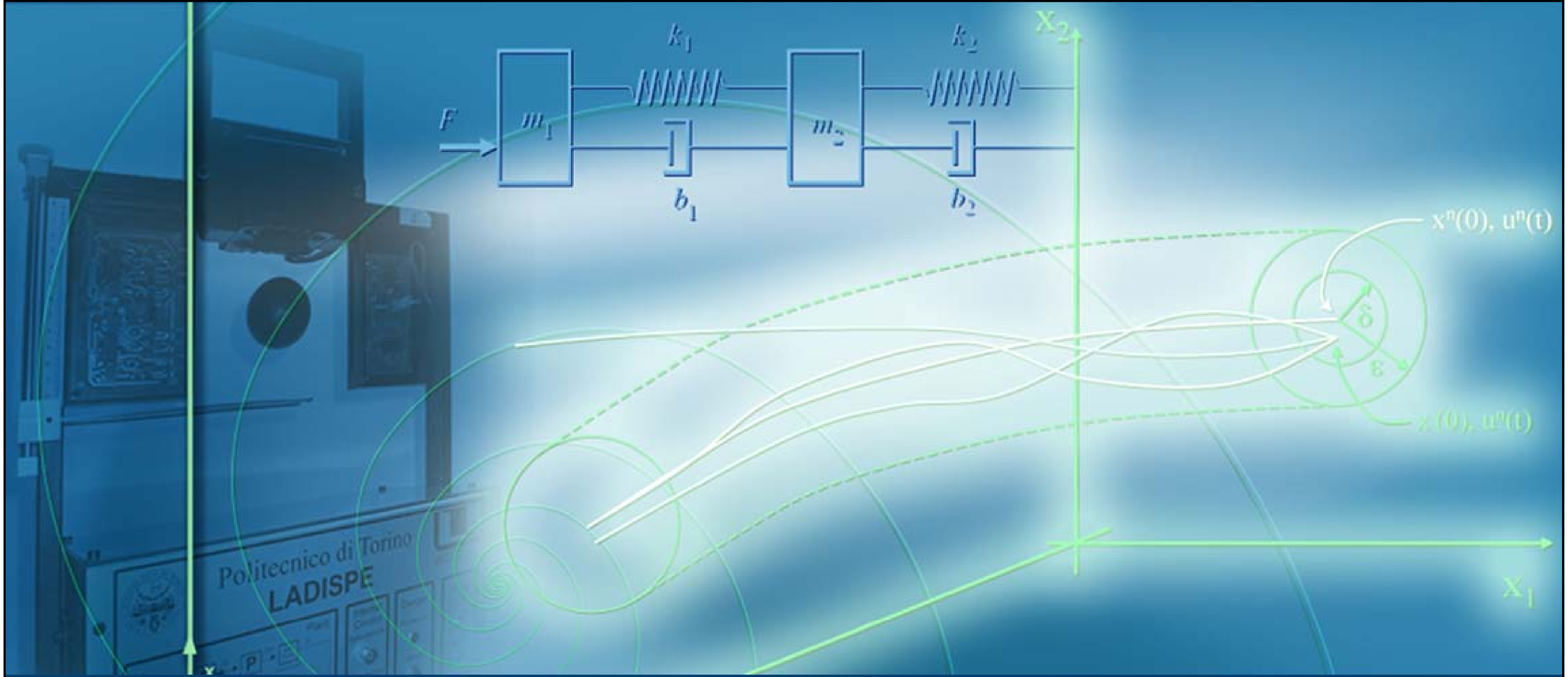
Criterio di Jury (3/3)

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & \boxed{b_0} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & \boxed{b_{n-1}} & \\
n-1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & \\
n-2 & \boxed{c_0} & c_1 & c_2 & \cdots & \boxed{c_{n-2}} & & \\
n-2 & c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \cdots & c_0 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\
2 & \boxed{z_0} & z_1 & \boxed{z_2} & & & & \\
2 & z_2 & z_1 & z_0 & & & &
\end{array}$$

- Devono essere soddisfatte le seguenti $n-2$ diseguaglianze:

$$|b_0| > |b_{n-1}|, \quad |c_0| > |c_{n-2}|, \quad \ldots, \quad |z_0| > |z_2|$$



Criteri di stabilità per sistemi dinamici LTI

Esempi di applicazione del criterio di Jury

Esempio #1 (1/3)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5$$

  analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury
- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 devono esser soddisfatte
  - Le 3 seguenti disuguaglianze che non richiedono la costruzione della tabella di Jury

    1) $p(\lambda = 1) > 0?$

    $$p(\lambda = 1) = 2 + 1 + 1 + 0.5 = 4.5 > 0$$

    2) $(-1)^n p(\lambda = -1) > 0?$

    $$(-1)^3 p(\lambda = -1) = -\left(-2 + 1 - 1 + 0.5\right) = 1.5 > 0$$

    3) $|a_n| > |a_0|?$

    $$|a_3 = 2| = 2 > |a_0 = 0.5| = 0.5$$

Esempio #1 (2/3)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$
$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5$$
analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury
- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 devono esser soddisfatte
  - Essendo $n > 2$, anche $n - 2 = 1$ disuguaglianza che richiede la costruzione della tabella di Jury seguente, costituita da $n - 1 = 2$ coppie di righe

Esempio #1 (3/3)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$
$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5$$
analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury
- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 0.5 & 1 & 1 & 2 \\
3 & 2 & 1 & 1 & 0.5 \\
2 & b_0 & b_1 & b_2 &
\end{array}$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} 0.5 & 2 \\ 2 & 0.5 \end{vmatrix} = -3.75\,,\; b_1 = \begin{vmatrix} 0.5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.5 = b_2$$

Esempio #1 (3/3)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 0.5 & 1 & 1 & 2 \\
3 & 2 & 1 & 1 & 0.5 \\
2 & -3.75 & -1.5 & -1.5 & \\
2 & -1.5 & -1.5 & -3.75 &
\end{array}$$

Esempio #1 (3/3)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 3$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 0.5 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0.5 \\ 2 & \boxed{-3.75} & -1.5 & \boxed{-1.5} & \\ 2 & -1.5 & -1.5 & -3.75 & \end{array}$$

$$\left| b_0 = -3.75 \right| = 3.75 > \left| b_2 = -1.5 \right| = 1.5$$

- Tutte le disuguaglianze richieste dal criterio di Jury sono soddisfatte $\Rightarrow$ tutte le radici del polinomio $p(\lambda)$ sono in modulo strettamente minori di 1

Esempio #2 (1/4)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$
$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 0.5\lambda - 1$$
analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury
- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 devono esser soddisfatte
  - Le 3 seguenti disuguaglianze che non richiedono la costruzione della tabella di Jury
    1) $p(\lambda = 1) > 0?$
    $$p(\lambda = 1) = 2 + 1 + 3 + 0.5 - 1 = 5.5 > 0$$
    2) $(-1)^n p(\lambda = -1) > 0?$
    $$(-1)^4 p(\lambda = -1) = 2 - 1 + 3 - 0.5 - 1 = 2.5 > 0$$
    3) $|a_n| > |a_0|?$
    $$|a_4 = 2| = 2 > |a_0 = -1| = 1$$

Esempio #2 (2/4)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 0.5\lambda - 1$$

  analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury
- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 devono esser soddisfatte
  - Essendo $n > 2$, anche altre $n - 2 = 2$ disuguaglianze che richiedono la costruzione della tabella di Jury seguente, costituita da $n - 1 = 3$ coppie di righe

Esempio #2 (3/4)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 0.5\lambda - 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc} 4 & -1 & 0.5 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 0.5 & -1 \\ 3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \end{array}$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\,,\; b_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{vmatrix} = -2.5$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9\,,\; b_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Esempio #2 (3/4)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$

$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 0.5\lambda - 1$$

analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

4	–1	0.5	3	1	2
4	2	1	3	0.5	–1
3	–3	–2.5	–9	–2	
3	–2	–9	–2.5	–3	

Esempio #2 (3/4)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$
$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 0.5\lambda - 1$$
analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury
- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

4	-1	0.5	3	1	2
4	2	1	3	0.5	-1
3	-3	-2.5	-9	-2	
3	-2	-9	-2.5	-3	
2	c_0	c_1	c_2		

$$c_0 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 5,\ c_1 = \begin{vmatrix} -3 & -9 \\ -2 & -2.5 \end{vmatrix} = -10.5,\ c_2 = \begin{vmatrix} -3 & -2.5 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} = 22$$

Esempio #2 (3/4)

- Dato il seguente polinomio di grado $n = 4$
$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 0.5\lambda - 1$$
analizzarne le radici mediante il solo criterio di Jury
- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

4	–1	0.5	3	1	2
4	2	1	3	0.5	–1
3	–3	–2.5	–9	–2	
3	–2	–9	–2.5	–3	
2	5	–10.5	22		
2	22	–10.5	5		

Esempio #2 (4/4)

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

4	-1	0.5	3	1	2
4	2	1	3	0.5	-1
3	$\boxed{-3}$	-2.5	-9	$\boxed{-2}$	
3	-2	-9	-2.5	-3	
2	$\boxed{5}$	-10.5	$\boxed{22}$		
2	22	-10.5	5		

$$\left|b_0 = -3\right| = 3 > \left|b_3 = -2\right| = 2$$

$$\text{ma } \left|c_0 = 5\right| = 5 < \left|c_2 = 22\right| = 22$$

- Non tutte le disuguaglianze richieste dal criterio di Jury sono soddisfatte $\Rightarrow$ non tutte le radici di $p(\lambda)$ sono in modulo strettamente minori di 1

Esempio #3 (1/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5k$$

per quali k tutte le radici sono in modulo < 1 ?

- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 devono esser soddisfatte
  - Le 3 seguenti disuguaglianze che non richiedono la costruzione della tabella di Jury

1) $p(\lambda = 1) > 0?$

$$p(\lambda = 1) = 4 + 0.5k > 0 \Rightarrow k > -8$$

2) $(-1)^n p(\lambda = -1) > 0?$

$$(-1)^3 p(\lambda = -1) = 2 - 0.5k > 0 \Rightarrow k < 4$$

3) $|a_n| > |a_0|?$

$$|a_3 = 2| = 2 > |a_0 = 0.5k| = 0.5|k| \Rightarrow |k| < 4$$

Esempio #3 (2/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5k$$
per quali k tutte le radici sono in modulo < 1 ?
- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 devono esser soddisfatte
  - Essendo $n > 2$, anche $n - 2 = 1$ disuguaglianza che richiede la costruzione della tabella di Jury seguente, costituita da $n - 1 = 2$ coppie di righe

Esempio #3 (3 / 4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5k$$
per quali k tutte le radici sono in modulo < 1 ?
- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 0.5k & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0.5k \\ 2 & b_0 & b_1 & b_2 & \end{array}$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} 0.5k & 2 \\ 2 & 0.5k \end{vmatrix} = 0.25k^2 - 4,\ b_1 = \begin{vmatrix} 0.5k & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.5k - 2 = b_2$$

Esempio #3 (3/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5k$$

per quali k tutte le radici sono in modulo < 1 ?

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

3	$0.5k$	1	1	2
3	2	1	1	$0.5k$
2	$0.25k^2-4$	$0.5k-2$	$0.5k-2$	
2	$0.5k-2$	$0.5k-2$	$0.25k^2-4$	

Esempio #3 (3/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5k$$

per quali k tutte le radici sono in modulo < 1 ?

- La tabella di Jury corrispondente è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 0.5k & 1 & 1 & 2 \\
3 & 2 & 1 & 1 & 0.5k \\
2 & \boxed{0.25k^2-4} & 0.5k-2 & \boxed{0.5k-2} & \\
2 & 0.5k-2 & 0.5k-2 & 0.25k^2-4 &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ deve essere soddisfatta anche la disuguaglianza

$$\left| b_0 = 0.25k^2 - 4 \right| > \left| b_2 = 0.5k - 2 \right|$$

Esempio #3 (4/4)

- Dato il seguente polinomio in cui il parametro $k \in \mathbb{R}$
$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0.5k$$
per quali k tutte le radici sono in modulo < 1 ?
- Affinché tutte le radici di $p(\lambda)$ siano in modulo strettamente minori di 1 deve risultare allora che
  1) $p(\lambda = 1) = 4 + 0.5k > 0 \Rightarrow k > -8$
  2) $(-1)^n p(\lambda = -1) = 2 - 0.5k > 0 \Rightarrow k < 4$
  3) $|a_n| > |a_0| \Rightarrow |k| < 4$
  4) $|b_0 = 0.25k^2 - 4| > |b_2 = 0.5k - 2| \Leftrightarrow$
     $|0.5k + 2| \cdot |0.5k - 2| > |0.5k - 2| \Leftrightarrow$
     per $|k| < 4, |0.5k + 2| > 1 \Rightarrow k > -2$

$\Rightarrow$ occorre complessivamente che $-2 < k < 4$

Esempio: $p(\lambda) = \lambda^2 - 1.2(1-K)\lambda + 0.2$

Per quali $K \in \mathbb{R}$, le radici di $p(\lambda)$ hanno:

- $|\cdot| < 1$
- $\mathrm{Re} > 0$

Per vedere se $|\cdot| < 1$, uso criterio di Jury:

- $p(\lambda = 1) = \cancel{1} - 1.2(\cancel{1} - K) + \cancel{0.2} = 1.2K > 0$

  $\Rightarrow \boxed{K > 0}$

- $(-1)^2 p(\lambda = -1) = 1 + 1.2(1-K) + 0.2 = \cancel{2.4}^{\,2} - \cancel{1.2}^{\,1}K > 0$

  $\Rightarrow \boxed{K < 2}$

- $|a_2| = |1| = 1 > |a_0| = |0.2| = 0.2, \quad \forall K$

$\Rightarrow \quad 0 < K < 2$

Per avere 2 radici con $\mathrm{Re} > 0$, dalla regola dei segni di Cartesio richiedo $\underline{\underline{2}}$ variazioni di segno in $p(\lambda)$:

$$a_n = a_2 = 1 > 0 \quad \forall K$$

$$a_1 = -1.2(1-K) < 0 \Rightarrow$$

$$-1.2 + 1.2K < 0 \Rightarrow \boxed{K < 1}$$

$$a_0 = 0.2 > 0, \quad \forall K$$

Quindi occorre

$$\boxed{0 < K < 1}$$