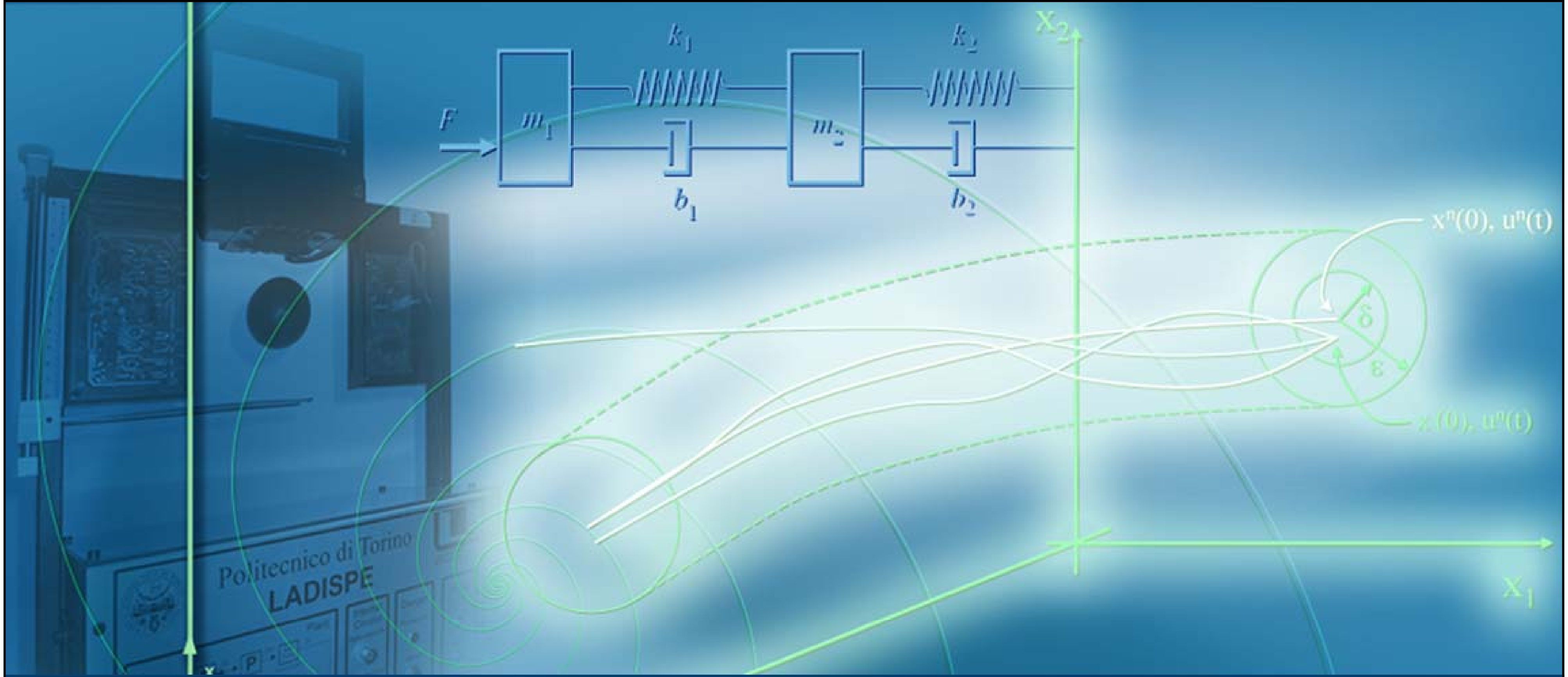
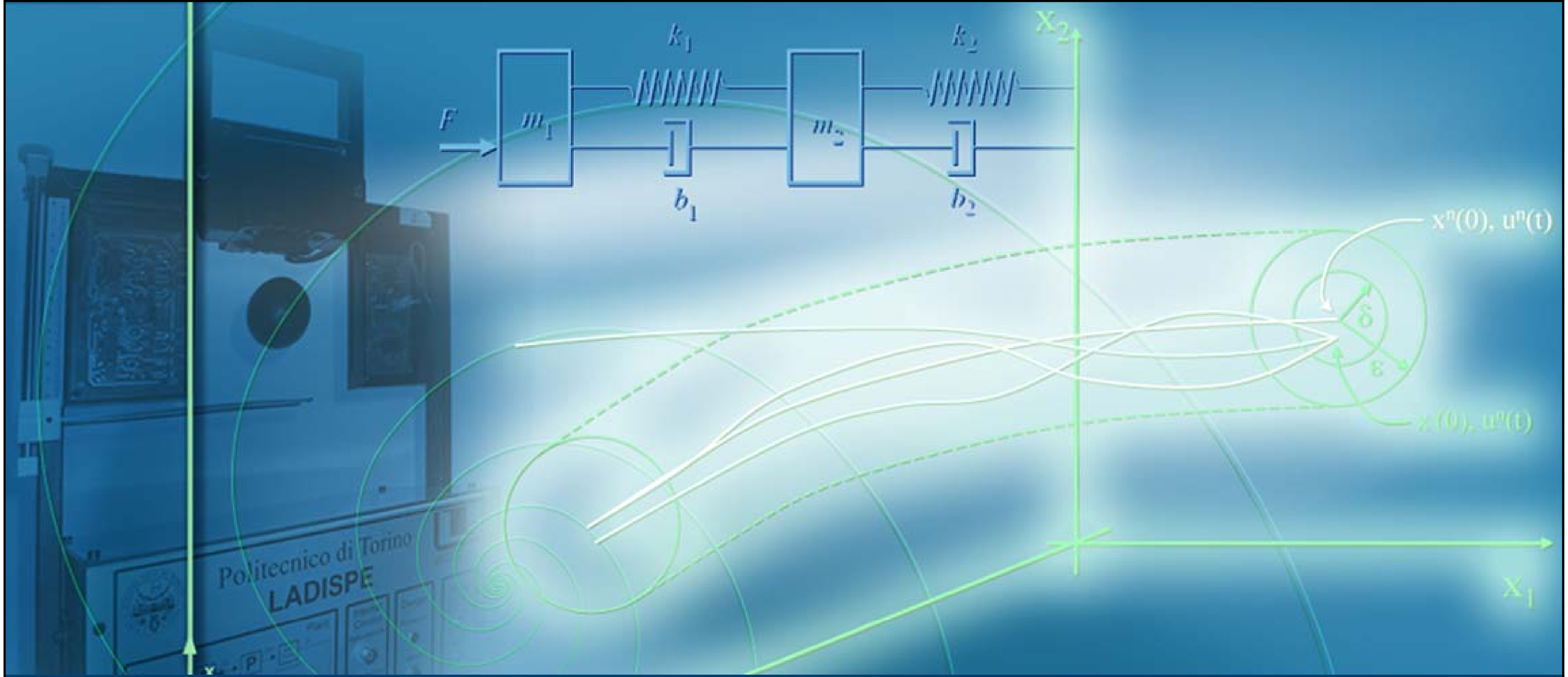


Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

- Modi naturali di un sistema dinamico
- Analisi modale
- Esercizio 1
- Costante di tempo
- Esercizio 2



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

Modi naturali di un sistema dinamico

Analisi del movimento libero (1/3)

- Vogliamo studiare le caratteristiche del movimento libero $x_\ell(t)$ di un sistema dinamico LTI TC di ordine n descritto dall'equazione di stato:

$$\boxed{\dot{x}(t) = A\,x(t)}$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \mathrm{x} n}$

- Dalla formula di Lagrange risulta che il movimento libero è:

$$\boxed{x_\ell(t) = e^{At}\,x(0_-)}$$

con $x(0_-) \in \mathbb{R}^n$ stato iniziale noto

Analisi del movimento libero (2/3)

- Se per semplicità supponiamo che:
  - La matrice A abbia n autovalori $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ reali e distinti
  - A sia diagonale
- La matrice esponenziale e^{At} è data da:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Analisi del movimento libero (3/3)

- In tal caso, l'espressione del movimento libero è:

$$x_\ell(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{e^{At}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0_-) \\ x_2(0_-) \\ \vdots \\ x_n(0_-) \end{bmatrix}}_{x(0_-)} = \begin{bmatrix} x_1(0_-)e^{\lambda_1 t} \\ x_2(0_-)e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ x_n(0_-)e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- Si nota che l'*i*-esima componente del movimento libero dipende dalla funzione $e^{\lambda_i t}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(t=0_-) = 1 \\ x_2(t=0_-) = 2 \\ x_3(t=0_-) = 3 \end{cases}$$

- $x_1(t) = a e^{3t} \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = \overbrace{a\,3\,e^{3t}}^{x_1} = 3x_1$

  $x_1(t=0_-) = a e^{3\cdot 0} = a = 1 \Rightarrow x_1(t) = e^{3t}\,\varepsilon(t)$

- $x_2(t) = b \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{db}{dt} = 0$

  $x_2(t=0_-) = b = 2 \Rightarrow x_2(t) = 2\,\varepsilon(t)$

- $x_3(t) = c e^{-t} \Rightarrow \dot{x}_3 = -\underbrace{c e^{-t}}_{x_3} = -x_3$

  $x_3(t=0_-) = c e^{-0} = c = 3 \Rightarrow x_3(t) = 3e^{-t}\,\varepsilon(t)$

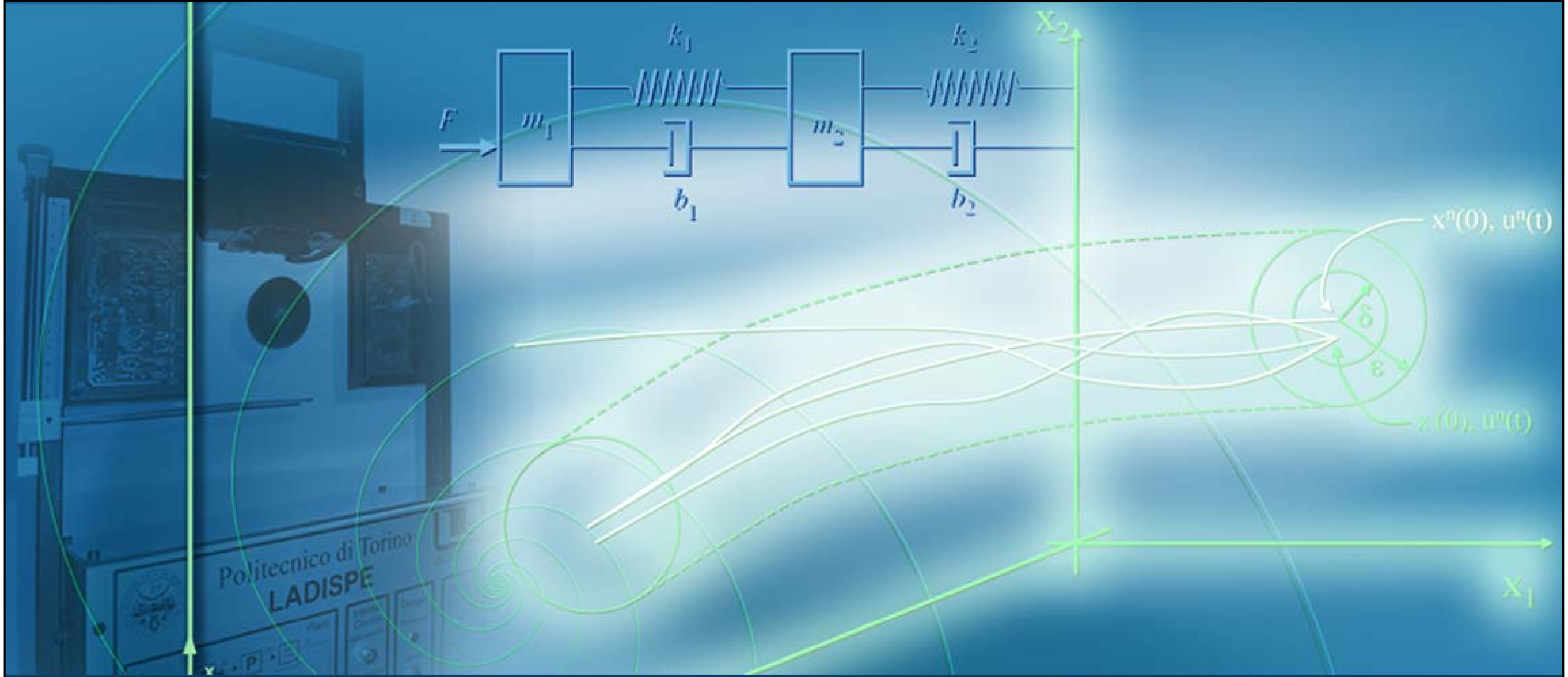
In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) = e^{3t}\,\varepsilon(t) \\ x_2(t) = 2\,\varepsilon(t) \\ x_3(t) = 3e^{-t}\,\varepsilon(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 = e^{0t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}}^{e^{At}} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}^{x(0_-)}$$

Modi naturali

- Ogni funzione del tipo $m_i(t) = e^{\lambda_i t}$ è detta **modo naturale** (o **modo proprio**) del sistema associato all'autovalore λ_i
- In generale, le espressioni analitiche dei modi naturali $m_i(t)$ non sono di forma semplicemente esponenziale
- Infatti, possono variare a seconda che gli autovalori siano reali o complessi ed inoltre dalla loro molteplicità



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

Analisi modale

Analisi modale: definizione

- Lo studio delle comportamento dei modi naturali in base alle caratteristiche degli autovalori associati va sotto il nome di **analisi modale del sistema**
- In particolare, l'**analisi modale** studia il comportamento dei **modi naturali** per $t \rightarrow \infty$
- L'analisi modale permette quindi di studiare le caratteristiche del movimento libero di un sistema dinamico

Classificazione dei modi naturali

- Si dice che un dato modo naturale $m(t)$ definito per $t \geq 0$ è
  - **Convergente** se:

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} |m(t)| = 0}$$

  - **Limitato** se $\exists\ M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall t \geq 0$ risulti:

$$\boxed{0 < |m(t)| \leq M < \infty}$$

  - **Divergente** se:

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} |m(t)| = \infty}$$

Caso generale: impostazione

- Per evidenziare i modi naturali associati alle varie tipologie di autovalori occorre calcolare e^{At}
- Il calcolo di e^{At} è immediato solo se A è diagonale
- In ogni caso, è possibile studiare le proprietà del movimento libero perché si dimostra che:

$$\boxed{e^{At} = Te^{\tilde{A}t}T^{-1}}$$

- T è una matrice costante
- $\tilde{A}$ è una matrice in forma di Jordan (diagonale oppure diagonale a blocchi)

Caso generale: forma di Jordan

- La forma di Jordan di una matrice quadrata avente q autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ di molteplicità $\mu_1, \ldots, \mu_q$ è una matrice diagonale a blocchi

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{A}_q \end{bmatrix}$$

- Le sottomatrici $\tilde{A}_i$, dette **blocchi di Jordan**, sono matrici quadrate associate all'i-esimo autovalore λ_i, e aventi dimensione $\mu_i \times \mu_i$

Caso generale: matrice esponenziale

- La matrice esponenziale di una matrice in forma di Jordan è data da una forma diagonale a blocchi del tipo:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\tilde{A}_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\tilde{A}_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\tilde{A}_q t} \end{bmatrix}$$

dove i blocchi $e^{\tilde{A}_i t}$ hanno forma diversa a seconda delle caratteristiche degli autovalori di A

Caso generale: movimento libero

- Si ha:

$$\boxed{x_\ell(t) = e^{At}x(0_-) = Te^{\tilde{A}t}T^{-1}x(0_-)}$$

- Poiché T e $x(0_-)$ sono costituite da numeri reali
  - L'espressione analitica di $x_\ell(t)$ è una combinazione lineare degli elementi della matrice $e^{\tilde{A}t}$
  - La forma semplificata di $\tilde{A}$ (e quindi di $e^{\tilde{A}t}$) permette di mettere immediatamente in evidenza la forma dei modi naturali
  - Si possono così analizzare in modo più immediato le proprietà qualitative del movimento libero $x_\ell(t)$

Caso generale: analisi modale

- Studieremo ora, come cambia la forma dei blocchi della matrice $e^{\tilde{A}t}$ al variare delle caratteristiche degli autovalori della matrice A
- Questo permetterà di:
  - Definire la forma dei modi naturali in base alle proprietà degli autovalori
  - Eseguire l'analisi modale del sistema
- Studieremo i seguenti casi:
  - Autovalori con molteplicità unitaria
  - Autovalori con molteplicità maggiore di uno

Autovalori $\mathbb{R}$ semplici

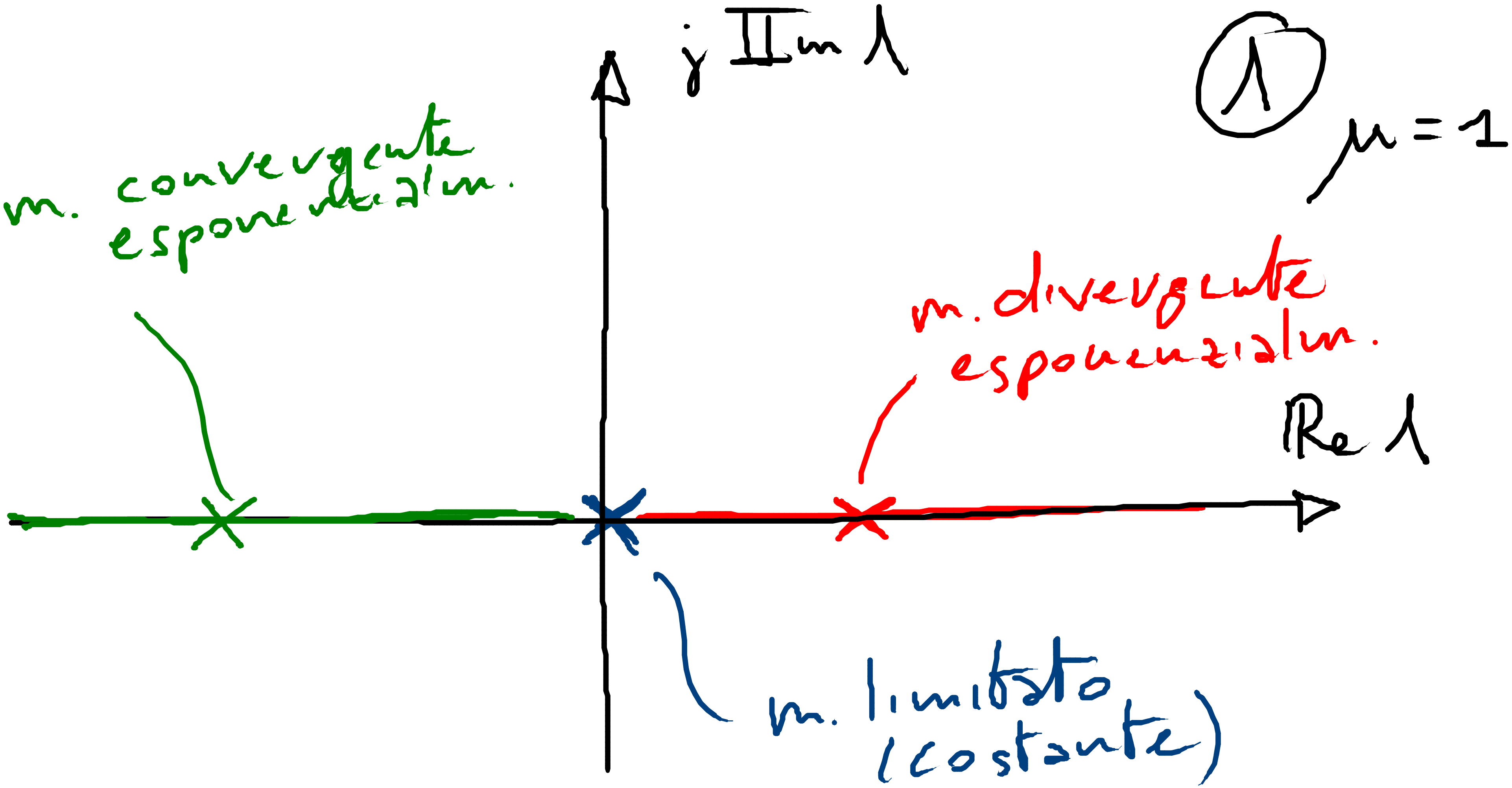
- I blocchi di $e^{\tilde{A}t}$ corrispondenti ad autovalori reali e distinti hanno forma diagonale:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

e danno origine a modi naturali esponenziali del tipo $e^{\lambda_i t}$

Autovalori $\mathbb{R}$ semplici: analisi modale

- Il modo naturale $e^{\lambda t}$, associato all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità unitaria, risulta:
  - **Esponenzialmente convergente** se $\mathbb{R}e(\lambda) < 0$ (Es. e^{-t})
  - **Limitato (costante)** se $\mathbb{R}e(\lambda) = 0$ (Es. $e^{-0t} = 1$)
  - **Esponenzialmente divergente** se $\mathbb{R}e(\lambda) > 0$ (Es. e^{t})



j Im λ
(1)
μ = 1
m. convergente esponenzialm.
m. divergente esponenzialm.
Re λ
m. limitato (costante)

Autovalori $\mathbb{C}$ semplici

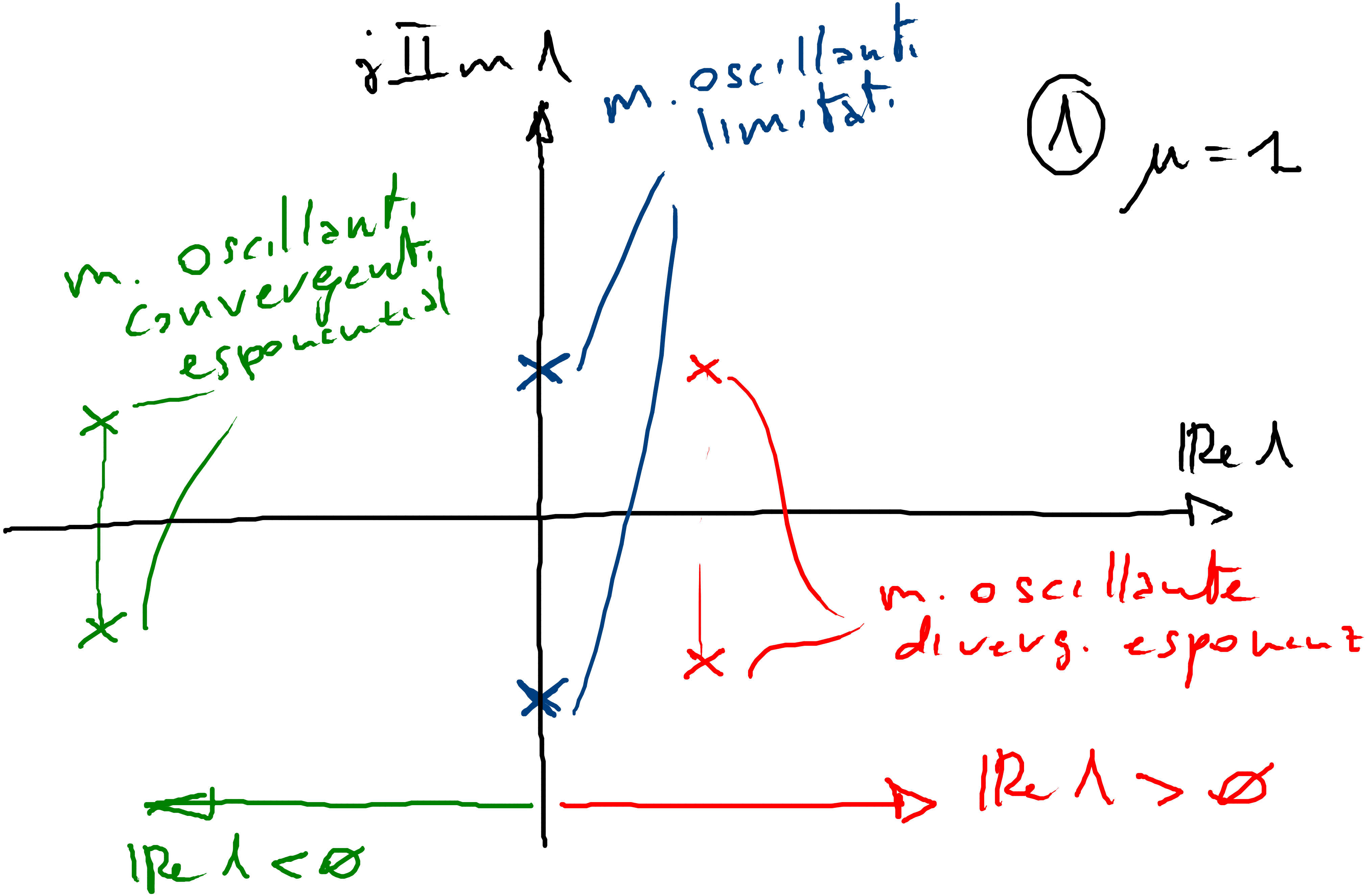
- I blocchi di $e^{\tilde{A}t}$ corrispondenti ad una coppia di autovalori complessi coniugati con molteplicità unitaria del tipo $\lambda = \sigma \pm j\omega$ hanno la forma:

$$\boxed{e^{\sigma t}\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}}$$

e danno origine a modi naturali del tipo $e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

Autovalori $\mathbb{C}$ semplici: analisi modale

- I modi naturali della forma $e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $e^{\sigma t}\sin(\omega t)$, associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati di molteplicità semplice del tipo $\lambda = \sigma \pm j\omega$ sono:
  - **Esponenzialmente convergenti**
    se $\mathbb{R}e(\lambda) = \sigma < 0$ (Es. $e^{-t}\sin(5t)$)
  - **Limitati (oscillanti)**
    se $\mathbb{R}e(\lambda) = \sigma = 0$, $\mathbb{I}m(\lambda) = \omega \neq 0$ (Es. $\sin(5t)$)
  - **Esponenzialmente divergenti**
    se $\mathbb{R}e(\lambda) = \sigma > 0$ (Es. $e^{t}\sin(5t)$)



j Im λ
m. oscillanti limitati
1
μ = 1
m. oscillanti convergenti esponenzial
Re λ
m. oscillante diverg. esponenz
Re λ > ∅
Re λ < ∅

Autovalori $\mathbb{R}$ multipli

- I blocchi di $e^{\tilde{A}t}$ corrispondenti ad un autovalore reale λ con molteplicità μ sono matrici diagonali a blocchi contenenti sottomatrici del tipo:

$$\boxed{\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{\mu'-1}}{(\mu'-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{\mu'-2}}{(\mu'-2)!}e^{\lambda t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}}$$

e danno origine a $\mu' \leq \mu$ modi naturali del tipo $t^{\mu'-1}e^{\lambda t}$, …, $te^{\lambda t}$, $e^{\lambda t}$

$\mu' =$ molteplicità geometrica

$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{molteplicità} \\ \text{algebrica}}}{\mu} - \underset{\substack{\uparrow \\ \geq 1}}{d} + 1 \leq \mu$

$d =$ dimensione dell'autospazio associato all'autovalore λ

$=$ numero di autovettori indipendenti fra loro associati all'autospazio

$$(\lambda I - A)\,\underline{v} = \underline{\emptyset}$$

Es #1:

$$A = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \emptyset, \quad \mu = 2$$

$$(\lambda I - A)\,\underline{v} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

Gli autovettori indip. sono

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \emptyset \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow d = 2$$

$$\mu' = 2 - 2 + 1 = 1 < \mu$$

Es. #2:

$$A = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \emptyset, \quad \mu = 2$$

$$(\lambda I - A)\,\underline{v} = \begin{bmatrix} \emptyset & -1 \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \emptyset$$

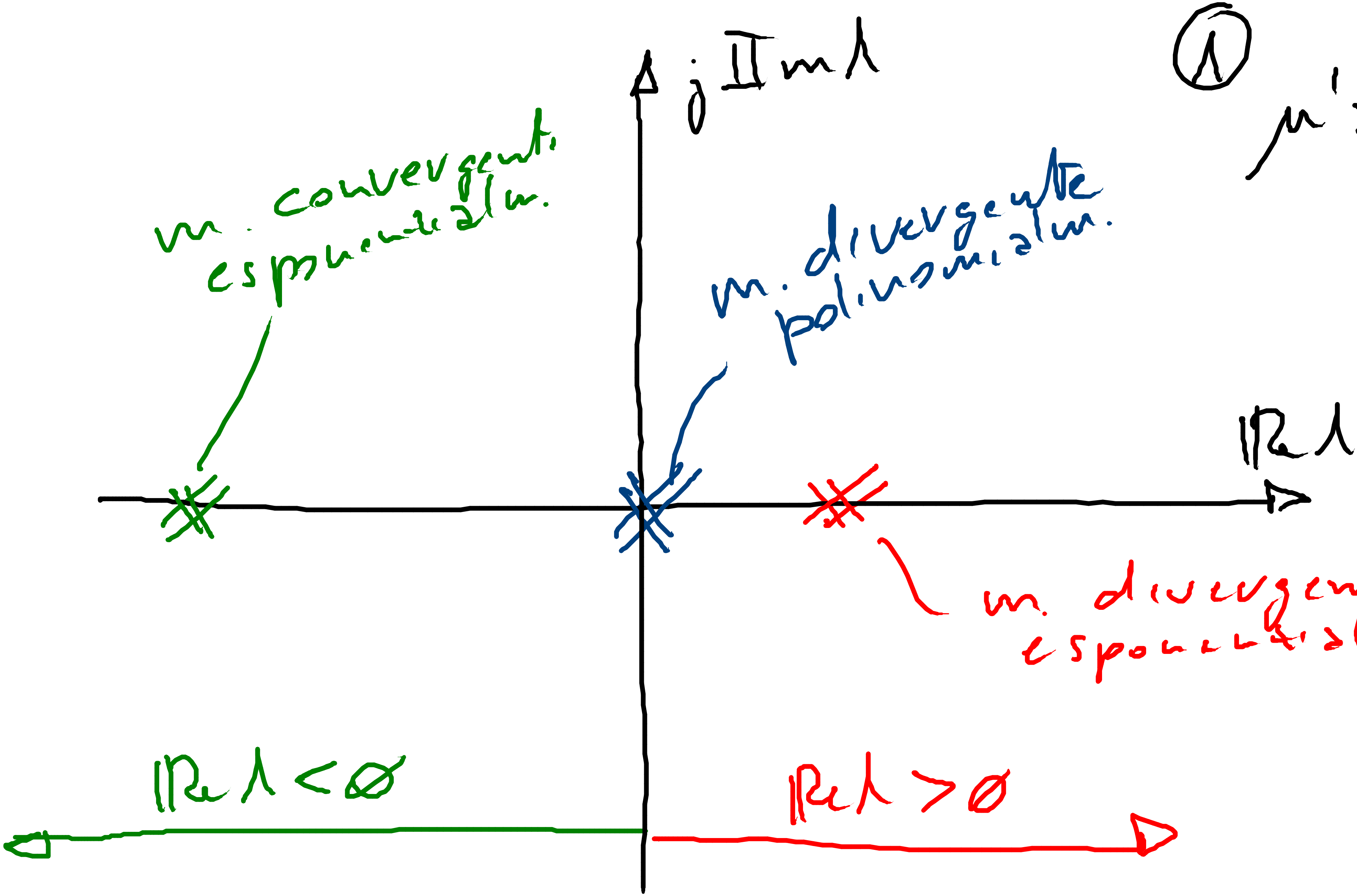
$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \emptyset \end{bmatrix} \Rightarrow d = 1$$

$$\mu' = 2 - 1 + 1 = \mu$$

Autovalori $\mathbb{R}$ multipli: analisi modale

- I μ' modi naturali della forma $t^{\mu'-1}e^{\lambda t}$, …, $te^{\lambda t}$, associati ad un autovalore reale λ con molteplicità μ sono:
  - **Esponenzialmente convergenti** se $\mathbb{R}e(\lambda) < 0$ (Es. te^{-t})
  - **Polinomialmente divergenti** se $\mathbb{R}e(\lambda) = 0$ (Es. $te^{0t} = t$)
  - **Esponenzialmente divergenti** se $\mathbb{R}e(\lambda) > 0$ (Es. $te^{0t} = t$, te^{t})

(1) $\mu' > 1$



j Im λ
Re λ
m. convergenti esponenzialm.
m. divergente polinomialm.
m. divergenti esponenzialm.
Re λ < 0
Re λ > 0

Autovalori $\mathbb{C}$ multipli

- I blocchi di $e^{\tilde{A}t}$ corrispondenti ad una coppia di autovalori complessi $\lambda = \sigma \pm j\omega$ con molteplicità μ hanno una forma analoga al caso reale $\Rightarrow$ danno origine in generale a $\mu' \leq \mu$ modi naturali del tipo:

$$t^{\mu'-1}e^{\sigma t}\cos(\omega t),\ \ldots,\ t\,e^{\sigma t}\cos(\omega t)\,,\ e^{\sigma t}\cos(\omega t)$$

$$t^{\mu'-1}e^{\sigma t}\sin(\omega t),\ \ldots,\ t\,e^{\sigma t}\sin(\omega t)\,,\ e^{\sigma t}\sin(\omega t)$$

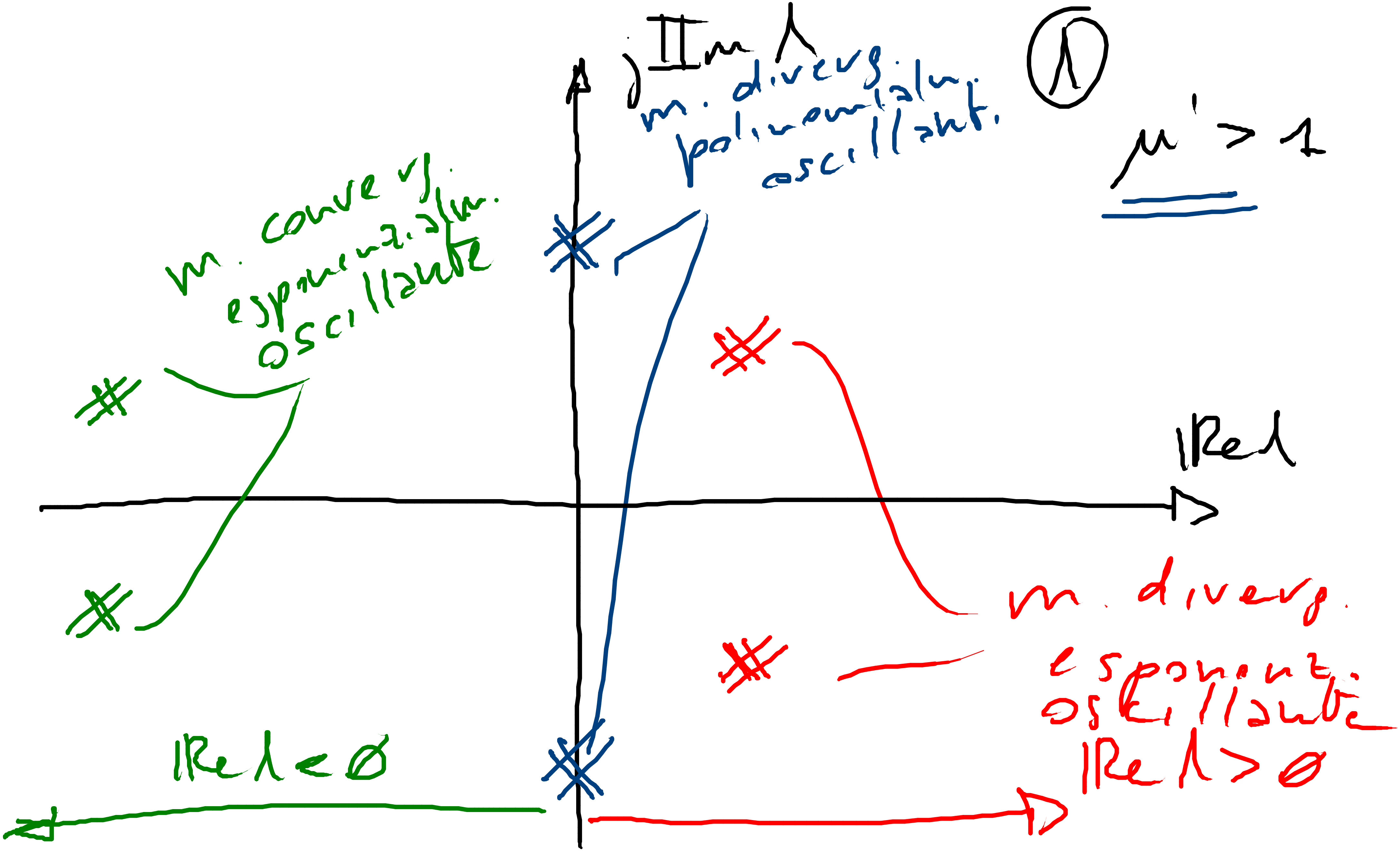
Autovalori $\mathbb{C}$ multipli: analisi modale

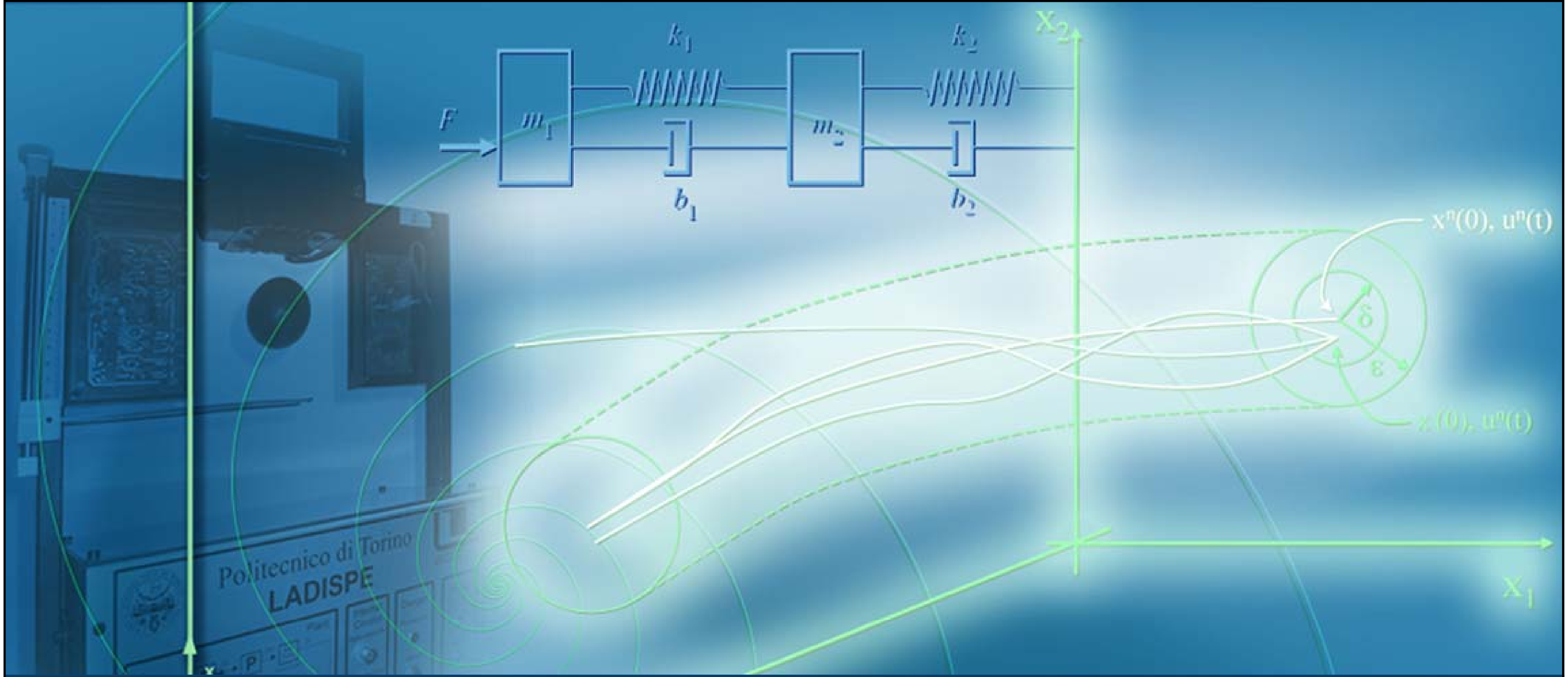
- I μ' modi naturali della forma

$$t^{\mu'-1}e^{\sigma t}\cos(\omega t),\ \ldots,\ e^{\sigma t}\cos(\omega t)$$
$$t^{\mu'-1}e^{\sigma t}\sin(\omega t),\ \ldots,\ t\,e^{\sigma t}\sin(\omega t)$$

associati ad una coppia di autovalori complessi del tipo $\lambda = \sigma \pm j\omega$ con molteplicità μ sono:

- **Esponenzialmente convergenti** se $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda) = \sigma < 0$ (Es. $te^{-t}\sin(5t)$)
- **Polinomialmente divergenti** se $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda) = \sigma = 0$ (Es. $t\sin(5t)$)
- **Esponenzialmente divergenti** se $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda) = \sigma > 0$ (Es. $te^{t}\sin(5t)$)


Im λ
(Λ)
μ' > 1
m. diverg. polinomiale oscillante
m. converg. esponenziale oscillante
m. diverg. esponenz. oscillante
Re λ
Re λ < 0
Re λ > 0



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

Esercizio 1

Formulazione del problema

- Si consideri un sistema dinamico LTI TC caratterizzato dalla seguente matrice *A*:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

- Determinare le caratteristiche dei modi naturali

Soluzione: calcolo dei modi naturali

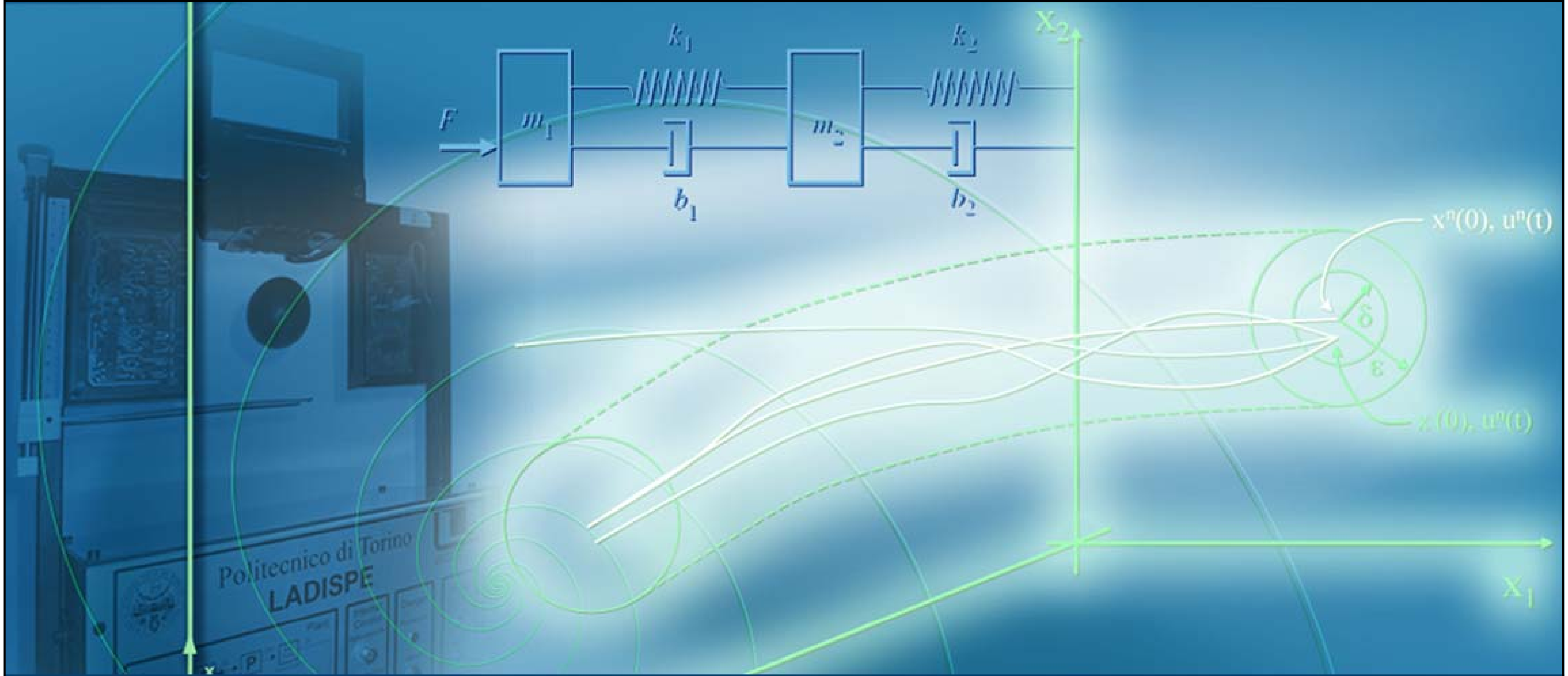
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

- Poiché la matrice *A* risulta triangolare, gli autovalori si leggono direttamente sulla diagonale e sono: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 4,\ \lambda_4 = 0$
- Gli autovalori sono reali e distinti pertanto i corrispondenti modi naturali sono rispettivamante:

$$\lambda_1 \rightarrow e^{-t},\ \lambda_2 \rightarrow e^{-2t},\ \lambda_3 \rightarrow e^{4t},\ \lambda_4 \rightarrow e^{0t}$$

Soluzione: analisi modale

- e^{-t} → modo esponenzialmente convergente
- e^{-2t} → modo esponenzialmente convergente
- e^{4t} → modo esponenzialmente divergente
- $e^{0t} = 1$ → modo limitato costante



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

Costante di tempo

Definizione

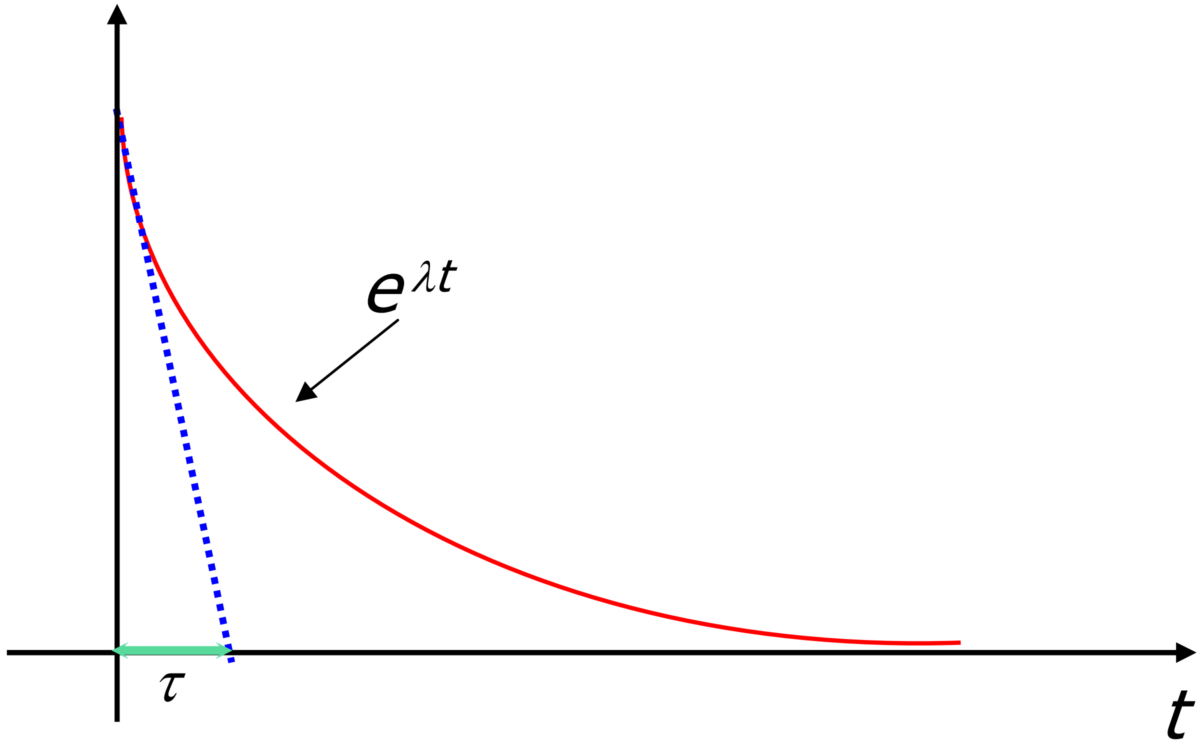
- Per un modo convergente associato all'autovalore λ con $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda) < 0$ si definisce **costante di tempo** la quantità:

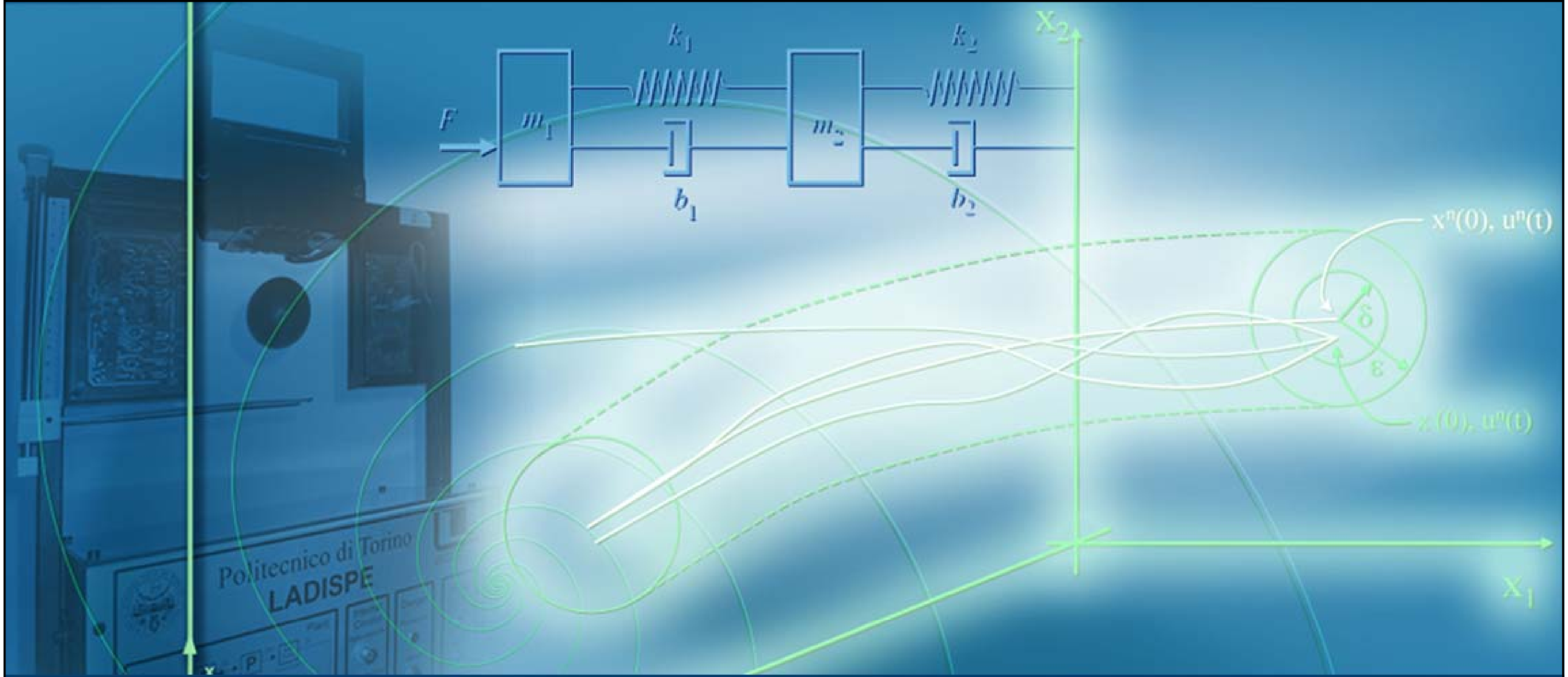
$$\boxed{\tau = \left|\frac{1}{\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda)}\right|}$$

- La costante di tempo τ rappresenta un misura della velocità di convergenza a zero del modo
- Ad esempio, il modo e^{-2t} (costante di tempo 0.5 s) converge a zero più rapidamente del modo e^{-t} (costante di tempo 1 s)

Interpretazione grafica

- La **costante di tempo** può anche essere valutata graficamente considerando l'intersezione con l'asse dei tempi della retta tangente al grafico di $e^{\lambda t}$ ($e^{\sigma t}$) passante per il punto di ascissa nulla





Analisi modale per sistemi dinamici LTI TC

Esercizio 2

Formulazione del problema

- Si consideri un sistema dinamico LTI TC caratterizzato dalla seguente matrice *A*:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

- Determinare le caratteristiche dei modi naturali e, se appropriato, calcolare le corrispondenti costanti di tempo

Soluzione: calcolo degli autovalori

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

A_{11}

A_{22}

- Poiché la matrice A risulta triangolare a blocchi gli autovalori sono quelli delle sottomatrici A_{11} e A_{22}
- Per la sottomatrice A_{11} si ha $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 5j$
- Per la sottomatrice A_{22} si ha $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -3$

Soluzione: analisi modale

- Il sistema presenta quattro autovalori distinti a parte reale negativa di cui due complessi coniugati.
- I modi naturali corrispondenti sono:
  - $\lambda_{1,2}$ → $e^{-0.5t}\cos(5t)$, $e^{-0.5t}\sin(5t)$ → modi esponenzialmente convergenti
  - λ_3 → e^{-t} → modo esponenzialmente convergente
  - λ_4 → e^{-3t} → modo esponenzialmente convergente
- Poiché tutti i modi naturali sono convergenti si possono calcolare le costanti di tempo

Soluzione: costanti di tempo

- Per i modi $e^{-0.5t}\cos(5t)$, $e^{-0.5t}\sin(5t)$ si ha:

$$\boxed{\tau_{1,2} = \left|\frac{1}{\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_{1,2})}\right| = \left|\frac{1}{-0.5}\right| = 2\,\mathrm{s}}$$

- Per il modo e^{-t} si ha:

$$\boxed{\tau_3 = \left|\frac{1}{\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_3)}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1\,\mathrm{s}}$$

- Per il modo e^{-3t} si ha:

$$\boxed{\tau_4 = \left|\frac{1}{\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_4)}\right| = \left|\frac{1}{-3}\right| = 0.\overline{3}\,\mathrm{s}}$$