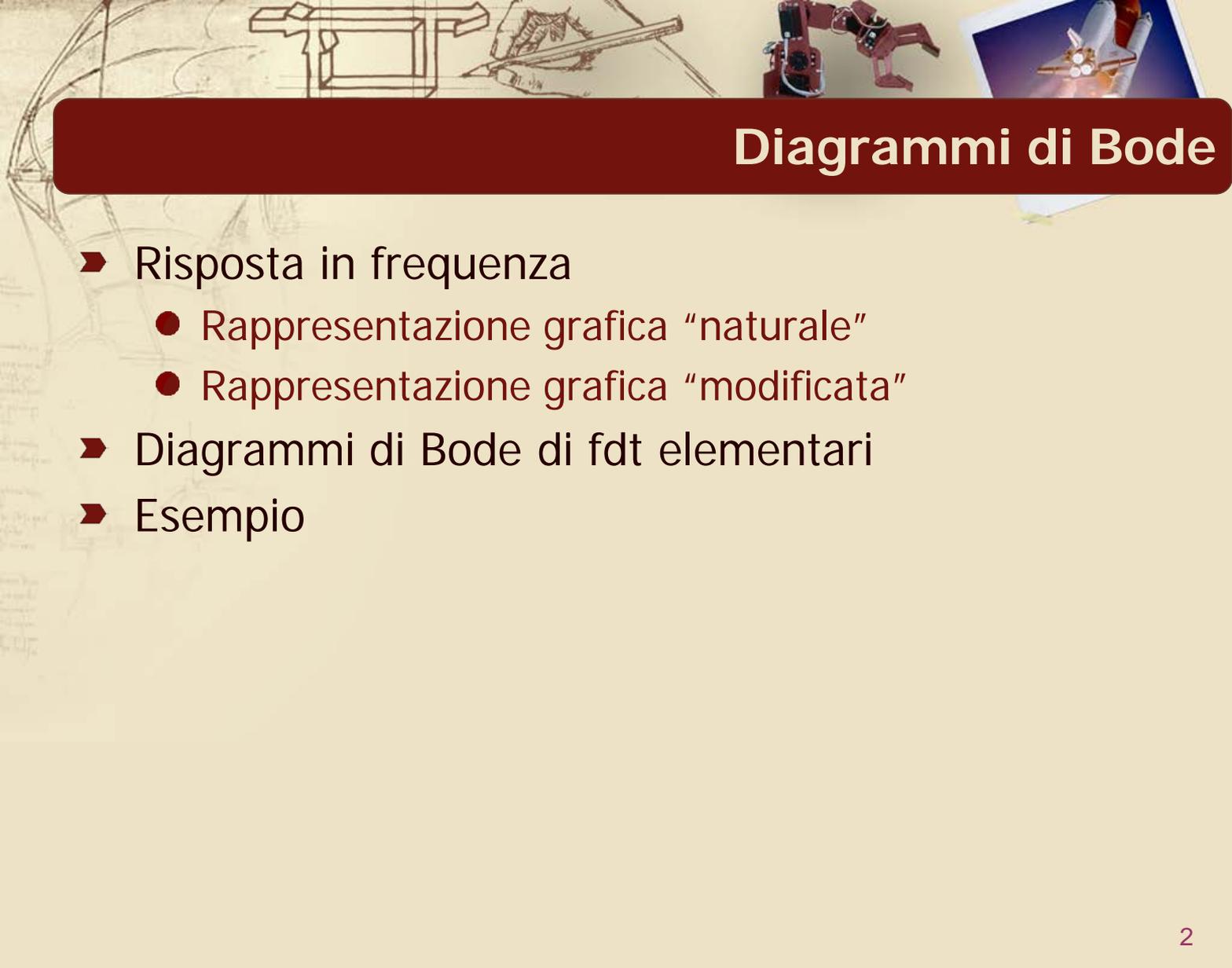


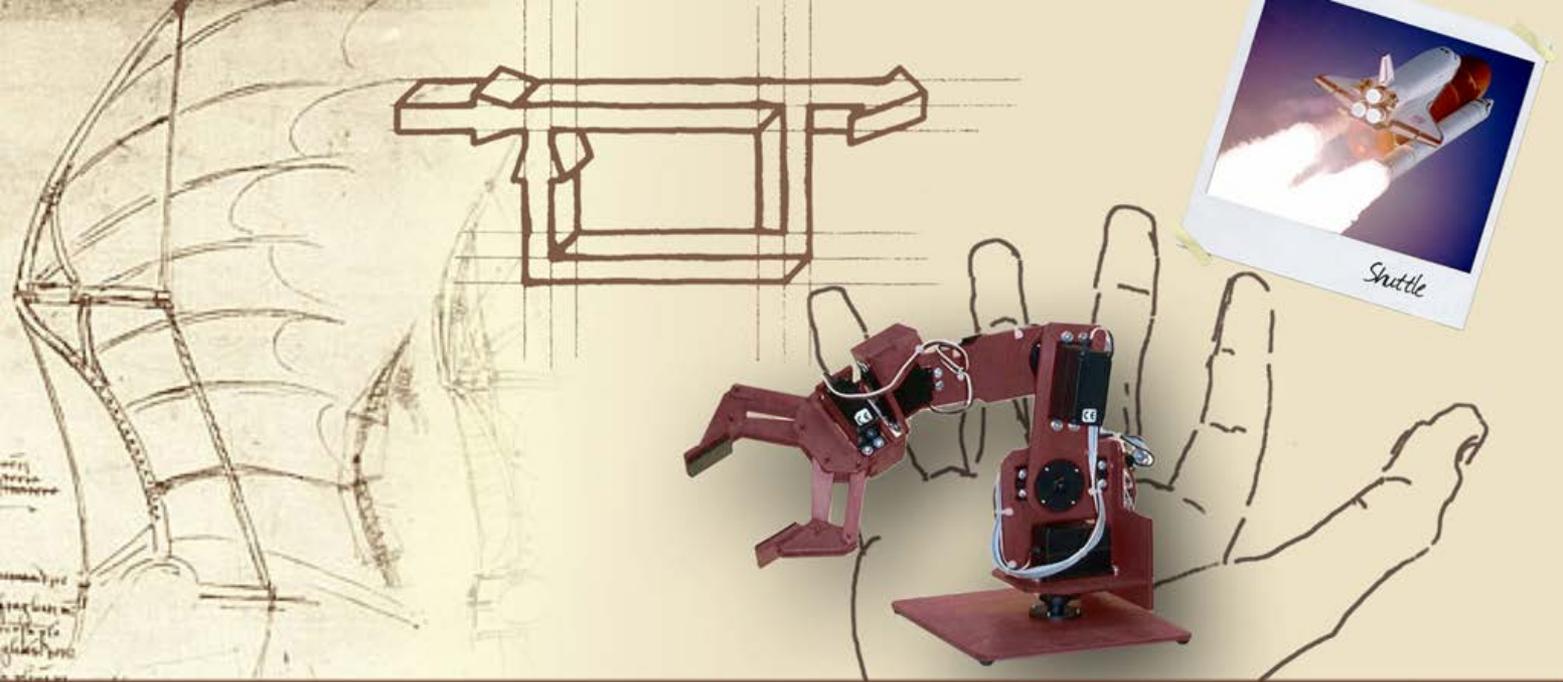
Stabilità dei sistemi di controllo in retroazione

Diagrammi di Bode



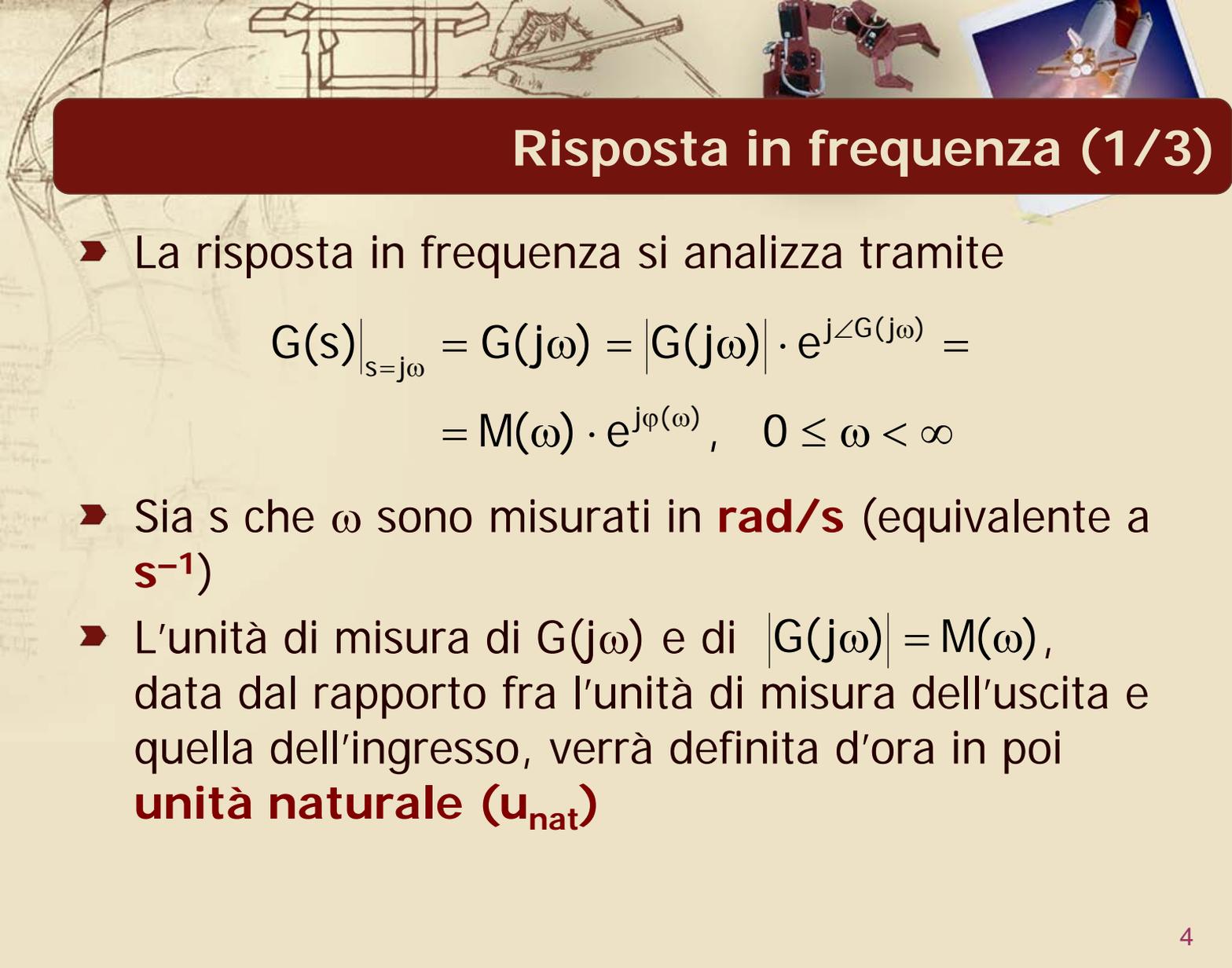
Diagrammi di Bode

- Risposta in frequenza
 - Rappresentazione grafica “naturale”
 - Rappresentazione grafica “modificata”
- Diagrammi di Bode di fdt elementari
- Esempio



Diagrammi di Bode

Risposta in frequenza

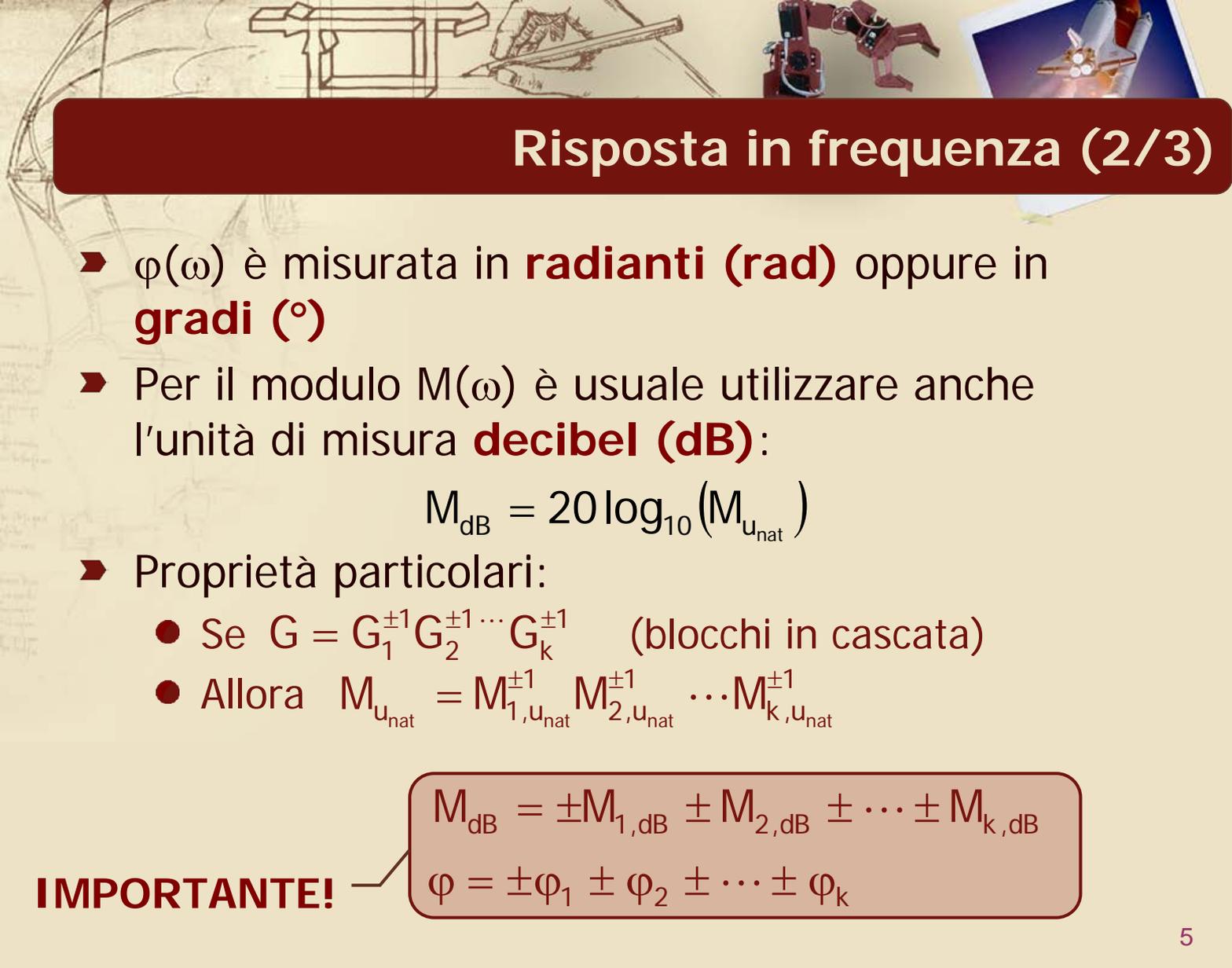


Risposta in frequenza (1/3)

- La risposta in frequenza si analizza tramite

$$\begin{aligned} G(s) \Big|_{s=j\omega} &= G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = \\ &= M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad 0 \leq \omega < \infty \end{aligned}$$

- Sia s che ω sono misurati in **rad/s** (equivalente a **s⁻¹**)
- L'unità di misura di $G(j\omega)$ e di $|G(j\omega)| = M(\omega)$, data dal rapporto fra l'unità di misura dell'uscita e quella dell'ingresso, verrà definita d'ora in poi **unità naturale (u_{nat})**



Risposta in frequenza (2/3)

- ▶ $\varphi(\omega)$ è misurata in **radianti (rad)** oppure in **gradi (°)**
- ▶ Per il modulo $M(\omega)$ è usuale utilizzare anche l'unità di misura **decibel (dB)**:

$$M_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(M_{u_{\text{nat}}})$$

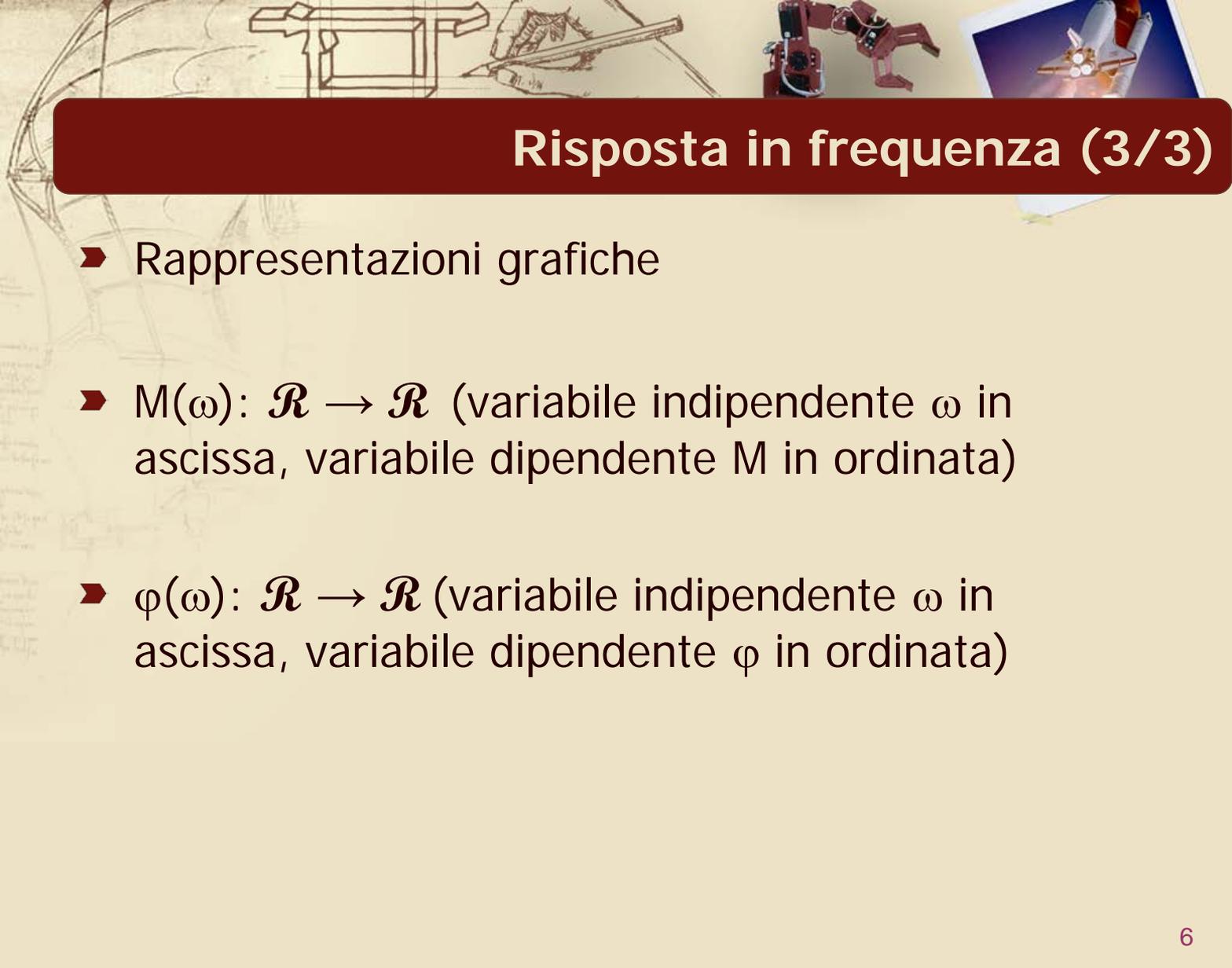
- ▶ Proprietà particolari:

- Se $G = G_1^{\pm 1} G_2^{\pm 1} \dots G_k^{\pm 1}$ (blocchi in cascata)
- Allora $M_{u_{\text{nat}}} = M_{1,u_{\text{nat}}}^{\pm 1} M_{2,u_{\text{nat}}}^{\pm 1} \dots M_{k,u_{\text{nat}}}^{\pm 1}$

$$M_{\text{dB}} = \pm M_{1,\text{dB}} \pm M_{2,\text{dB}} \pm \dots \pm M_{k,\text{dB}}$$

IMPORTANTE!

$$\varphi = \pm \varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \dots \pm \varphi_k$$



Risposta in frequenza (3/3)

- Rappresentazioni grafiche
- $M(\omega): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ (variabile indipendente ω in ascissa, variabile dipendente M in ordinata)
- $\varphi(\omega): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ (variabile indipendente ω in ascissa, variabile dipendente φ in ordinata)



Rappresentazione grafica "naturale"

- Pulsazione ω (rad/s) in ascissa, modulo M (u_{nat}) in ordinata, ω in scala lineare

Diagramma "naturale" del modulo

- Pulsazione ω (rad/s) in ascissa, fase φ (gradi) in ordinata, ω in scala lineare

Diagramma "naturale" della fase



Rappresentazione grafica “modificata”

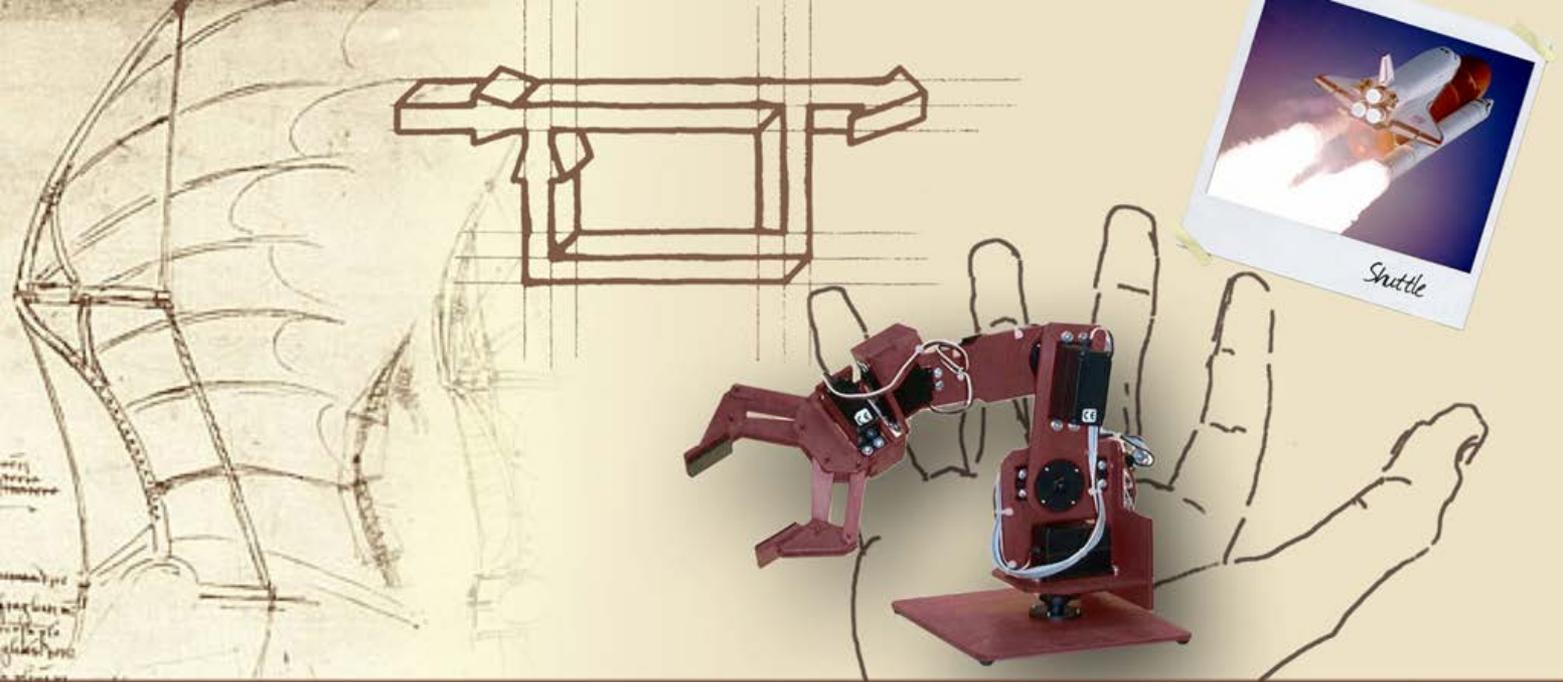
- Pulsazione ω (rad/s) in ascissa, modulo M (dB) in ordinata, ω in scala logaritmica

Diagramma “di Bode” del modulo

- Pulsazione ω (rad/s) in ascissa, fase φ (gradi) in ordinata, ω in scala logaritmica

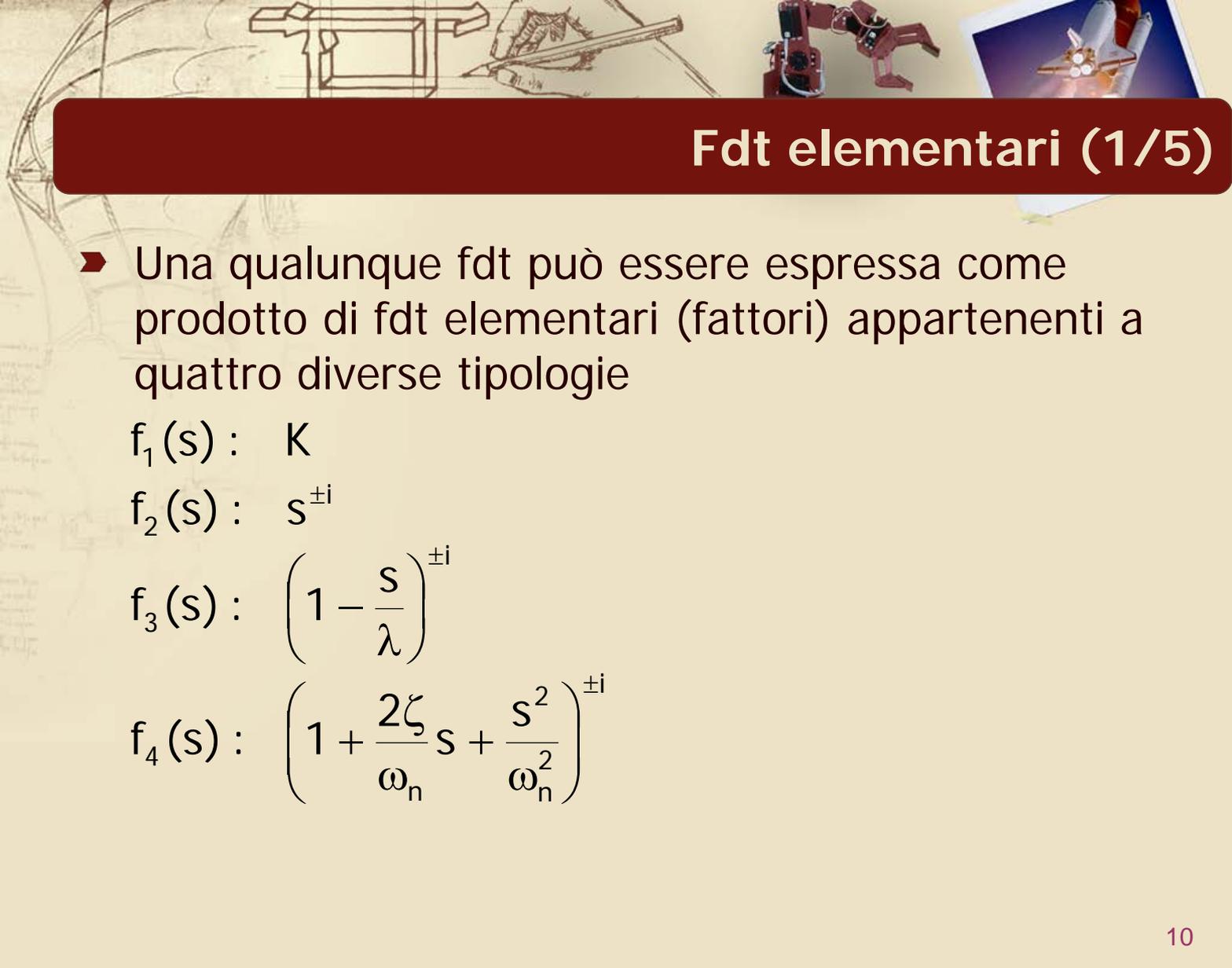
Diagramma “di Bode” della fase

- Diagramma di Bode → DdB



Diagrammi di Bode

Diagrammi di Bode di fdt elementari



Fdt elementari (1/5)

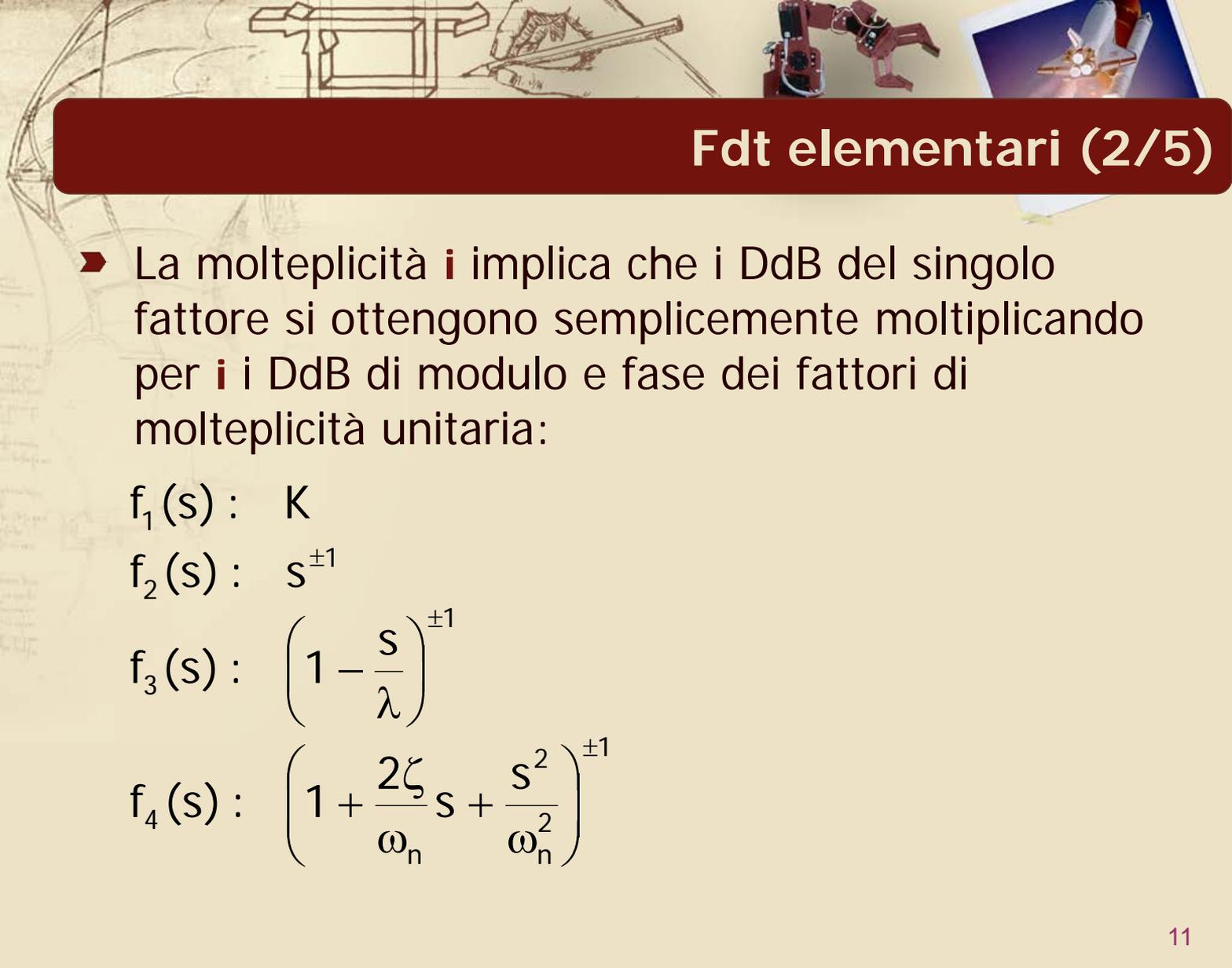
- Una qualunque fdt può essere espressa come prodotto di fdt elementari (fattori) appartenenti a quattro diverse tipologie

$$f_1(s) : K$$

$$f_2(s) : s^{\pm i}$$

$$f_3(s) : \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{\pm i}$$

$$f_4(s) : \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm i}$$



Fdt elementari (2/5)

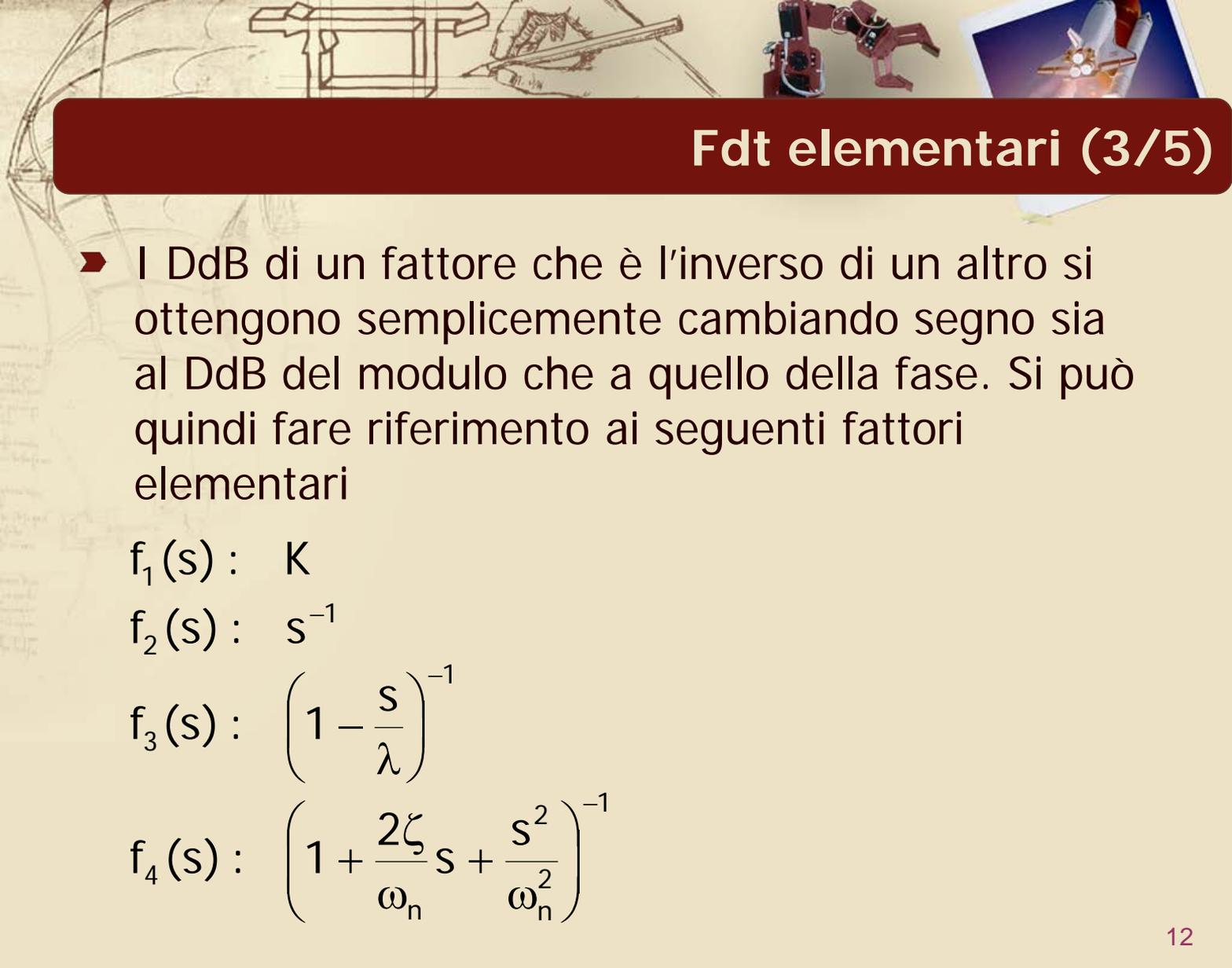
- La molteplicità i implica che i DdB del singolo fattore si ottengono semplicemente moltiplicando per i i DdB di modulo e fase dei fattori di molteplicità unitaria:

$$f_1(s) : K$$

$$f_2(s) : s^{\pm 1}$$

$$f_3(s) : \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{\pm 1}$$

$$f_4(s) : \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$$



Fdt elementari (3/5)

- I DdB di un fattore che è l'inverso di un altro si ottengono semplicemente cambiando segno sia al DdB del modulo che a quello della fase. Si può quindi fare riferimento ai seguenti fattori elementari

$$f_1(s) : K$$

$$f_2(s) : s^{-1}$$

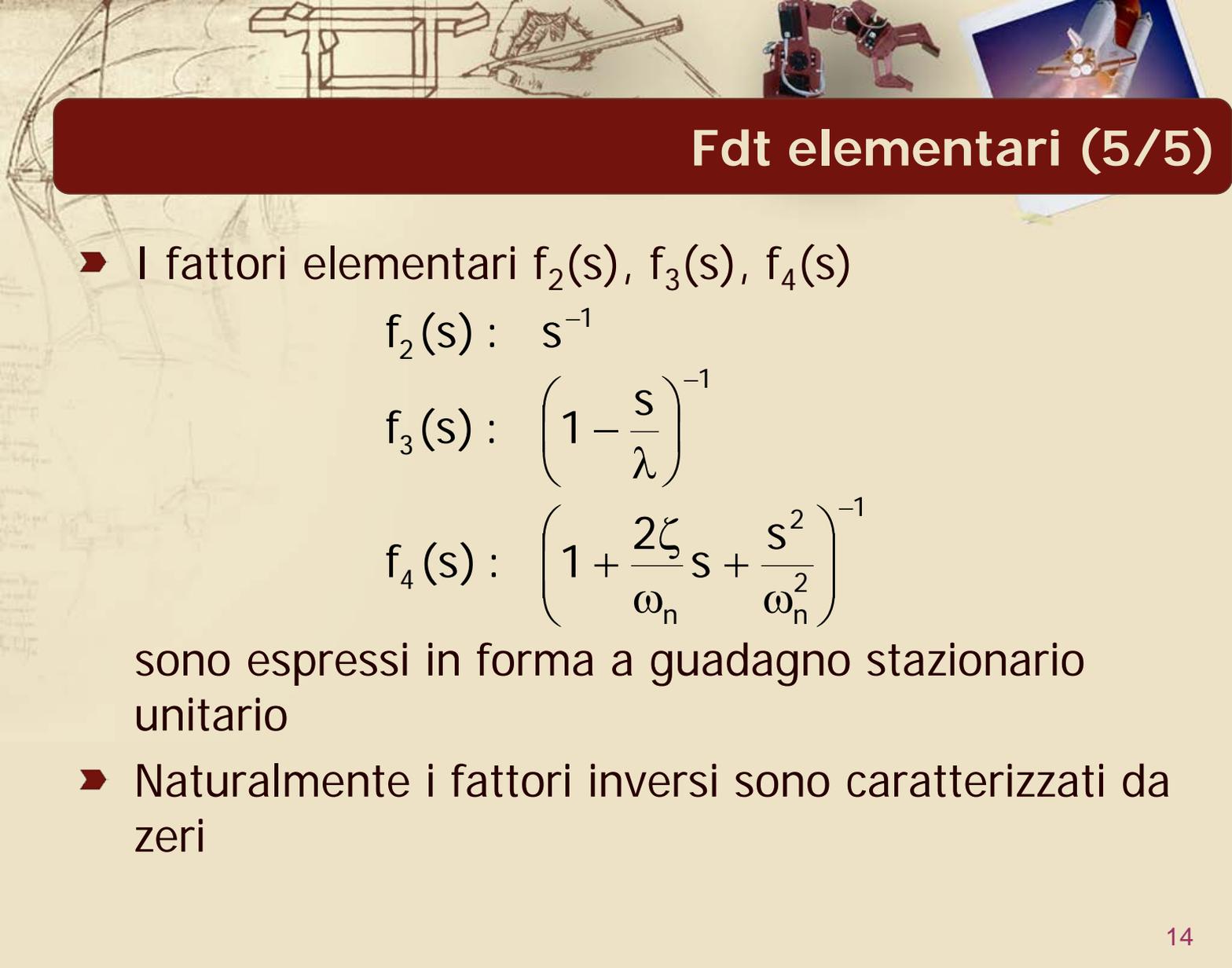
$$f_3(s) : \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{-1}$$

$$f_4(s) : \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{-1}$$



Fdt elementari (4/5)

- I fattori elementari $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$, $f_4(s)$ sono caratterizzati **rispettivamente** da:
- f_1 : un guadagno
 - f_2 : un polo nell'origine 0 (integratore)
 - f_3 : un polo reale λ (negativo o positivo, ovvero stabile o instabile)
 - f_4 : una coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale ω_n e fattore di smorzamento $-1 < \zeta < 1$ (si ricorda che: $\zeta > 0 \Rightarrow$ coppia stabile; $\zeta < 0 \Rightarrow$ coppia instabile; $\zeta = 0 \Rightarrow$ coppia sull'asse immaginario)



Fdt elementari (5/5)

- I fattori elementari $f_2(s)$, $f_3(s)$, $f_4(s)$

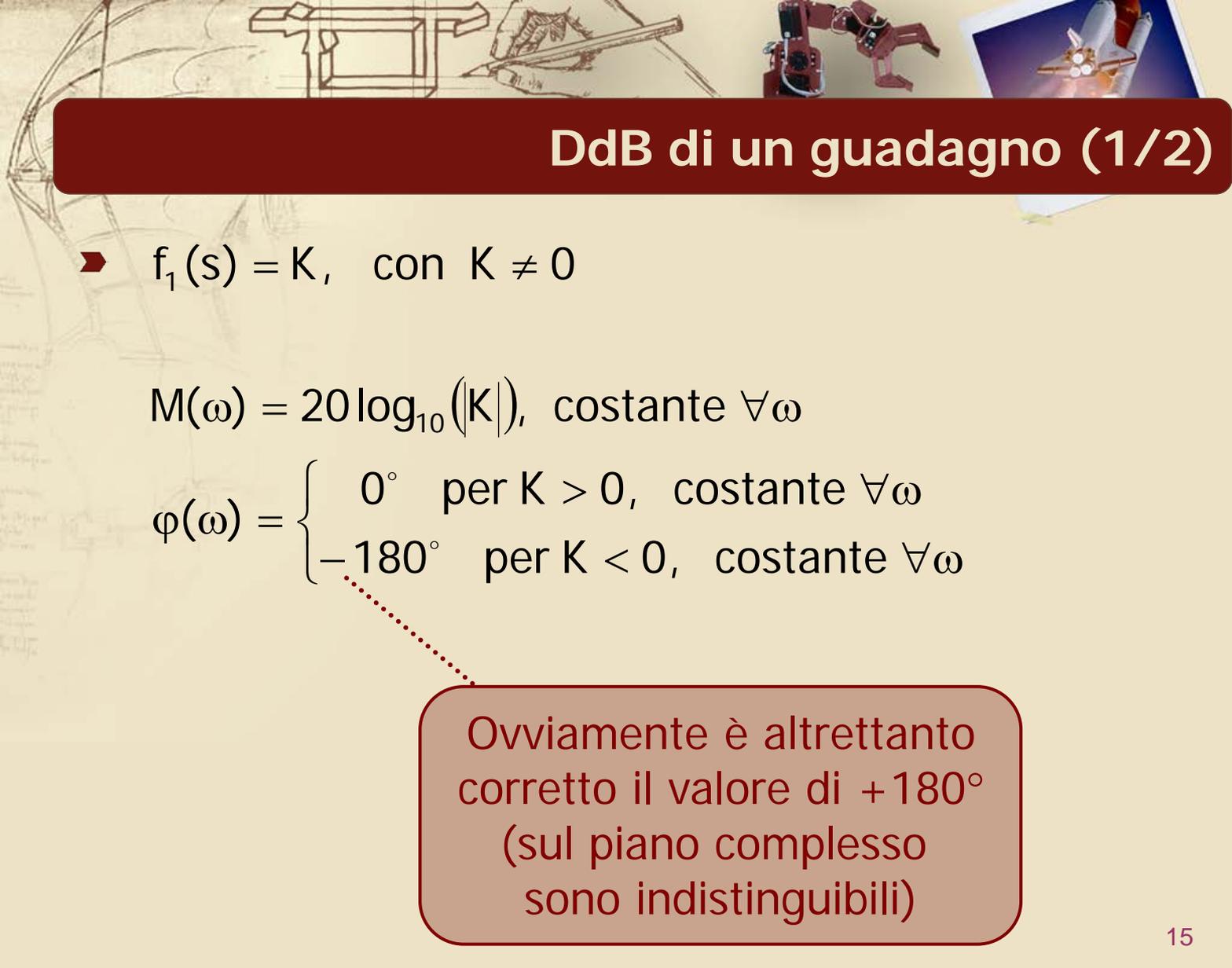
$$f_2(s) : s^{-1}$$

$$f_3(s) : \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{-1}$$

$$f_4(s) : \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{-1}$$

sono espressi in forma a guadagno stazionario unitario

- Naturalmente i fattori inversi sono caratterizzati da zeri



DdB di un guadagno (1/2)

► $f_1(s) = K$, con $K \neq 0$

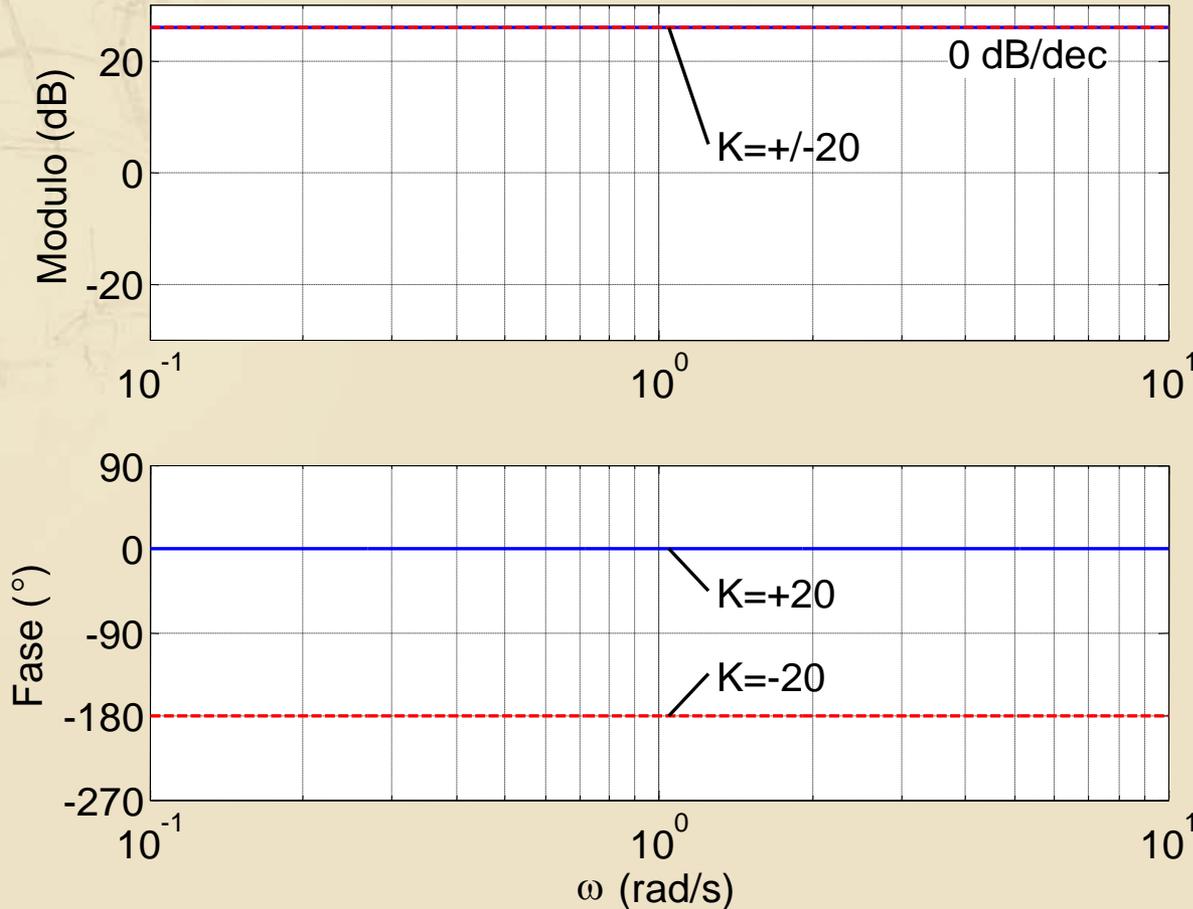
$$M(\omega) = 20 \log_{10}(|K|), \text{ costante } \forall \omega$$

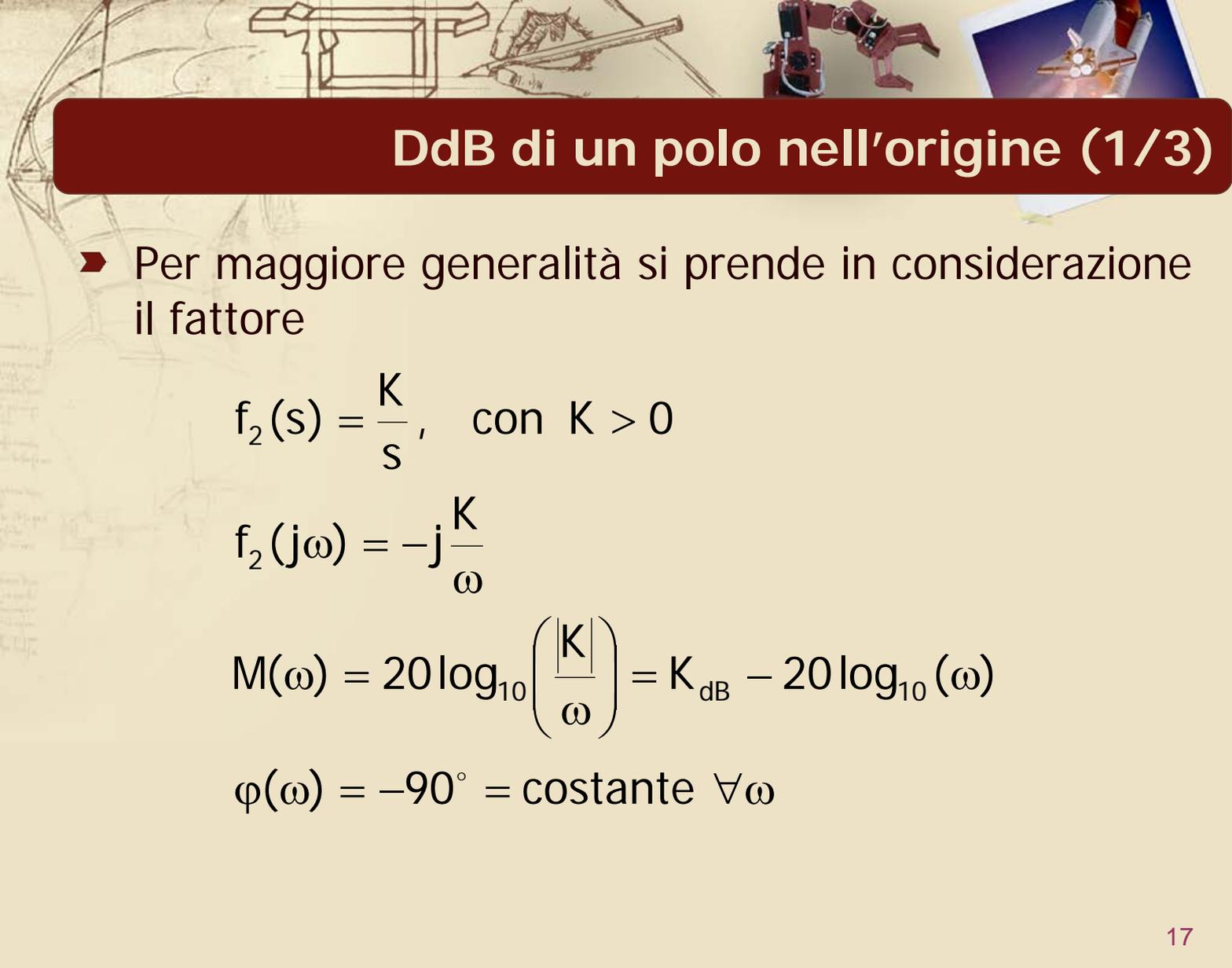
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{per } K > 0, \text{ costante } \forall \omega \\ -180^\circ & \text{per } K < 0, \text{ costante } \forall \omega \end{cases}$$

Ovviamente è altrettanto corretto il valore di $+180^\circ$ (sul piano complesso sono indistinguibili)

DdB di un guadagno (2/2)

Risposta in frequenza di $K=+20$ e $K=-20$





DdB di un polo nell'origine (1/3)

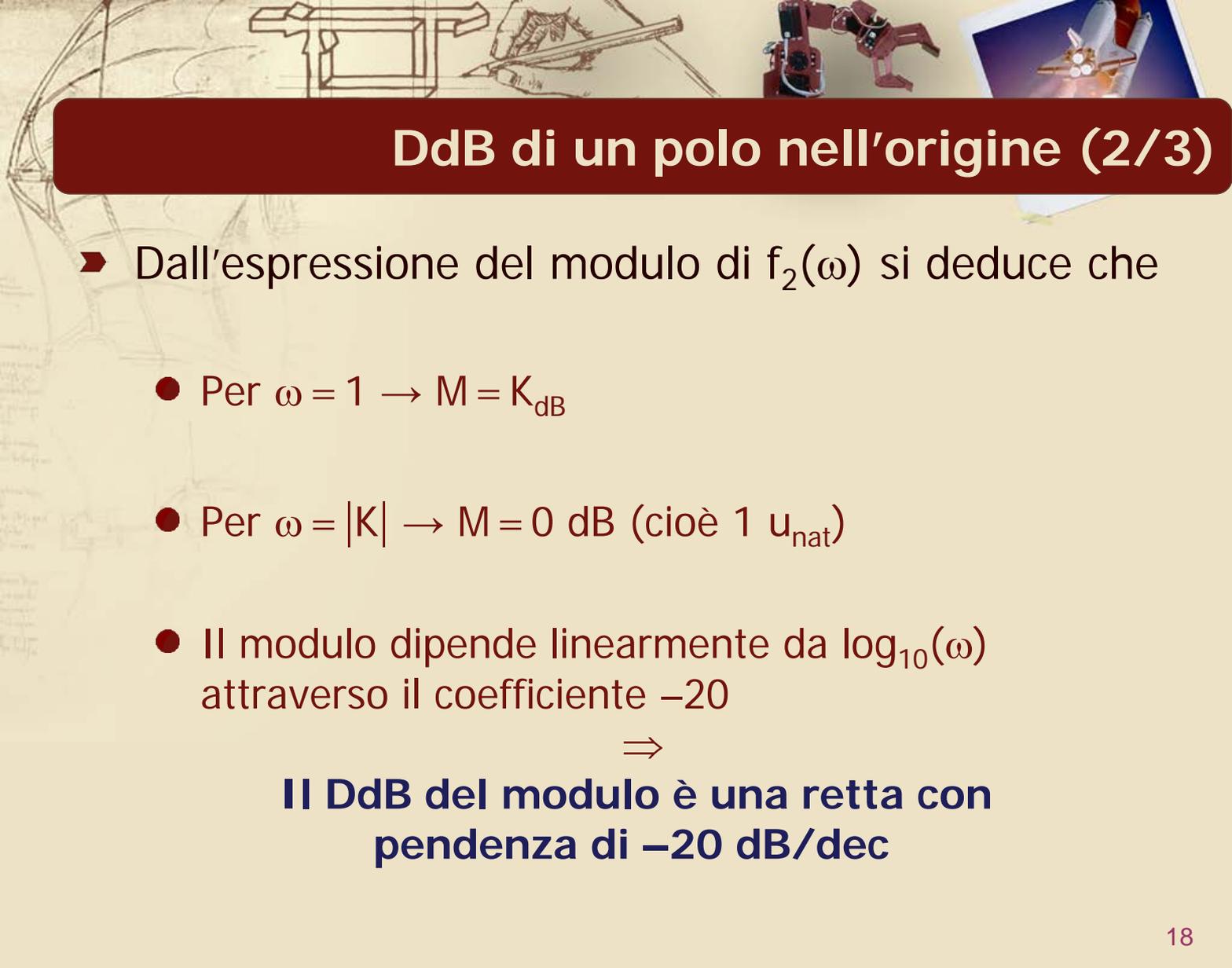
- Per maggiore generalità si prende in considerazione il fattore

$$f_2(s) = \frac{K}{s}, \quad \text{con } K > 0$$

$$f_2(j\omega) = -j \frac{K}{\omega}$$

$$M(\omega) = 20 \log_{10} \left(\frac{|K|}{\omega} \right) = K_{\text{dB}} - 20 \log_{10}(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ = \text{costante } \forall \omega$$



DdB di un polo nell'origine (2/3)

► Dall'espressione del modulo di $f_2(\omega)$ si deduce che

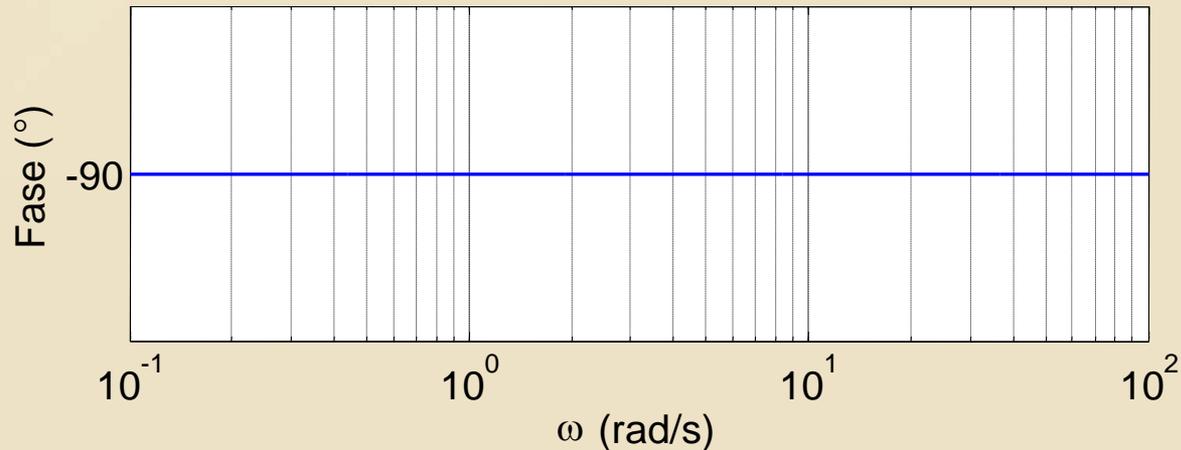
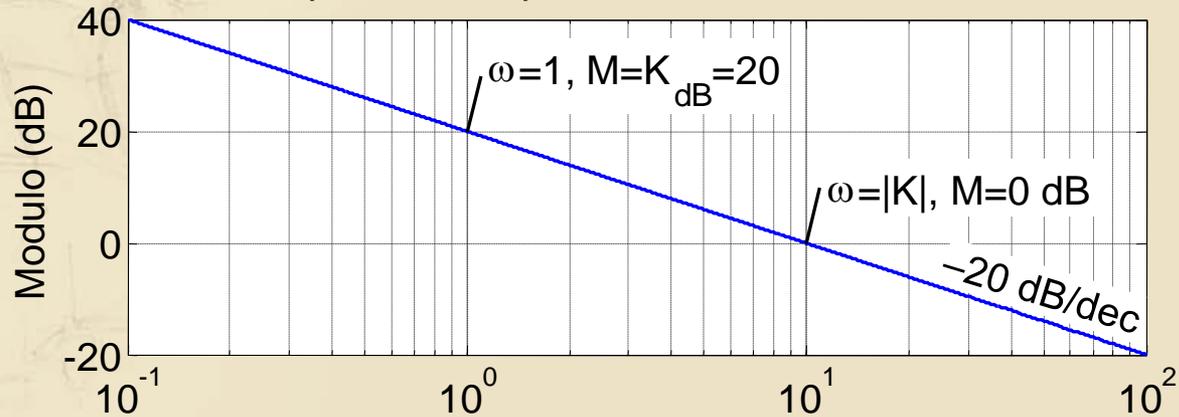
- Per $\omega = 1 \rightarrow M = K_{dB}$
- Per $\omega = |K| \rightarrow M = 0 \text{ dB}$ (cioè $1 u_{nat}$)
- Il modulo dipende linearmente da $\log_{10}(\omega)$ attraverso il coefficiente -20

⇒

Il DdB del modulo è una retta con pendenza di -20 dB/dec

DdB di un polo nell'origine (3/3)

Risposta in frequenza di $G=K/s$, con $K=10$





DdB di un polo multiplo nell'origine

► Sia $f'_2(s) = \frac{K}{s^i}$, con $K > 0$

i = molteplicità del polo

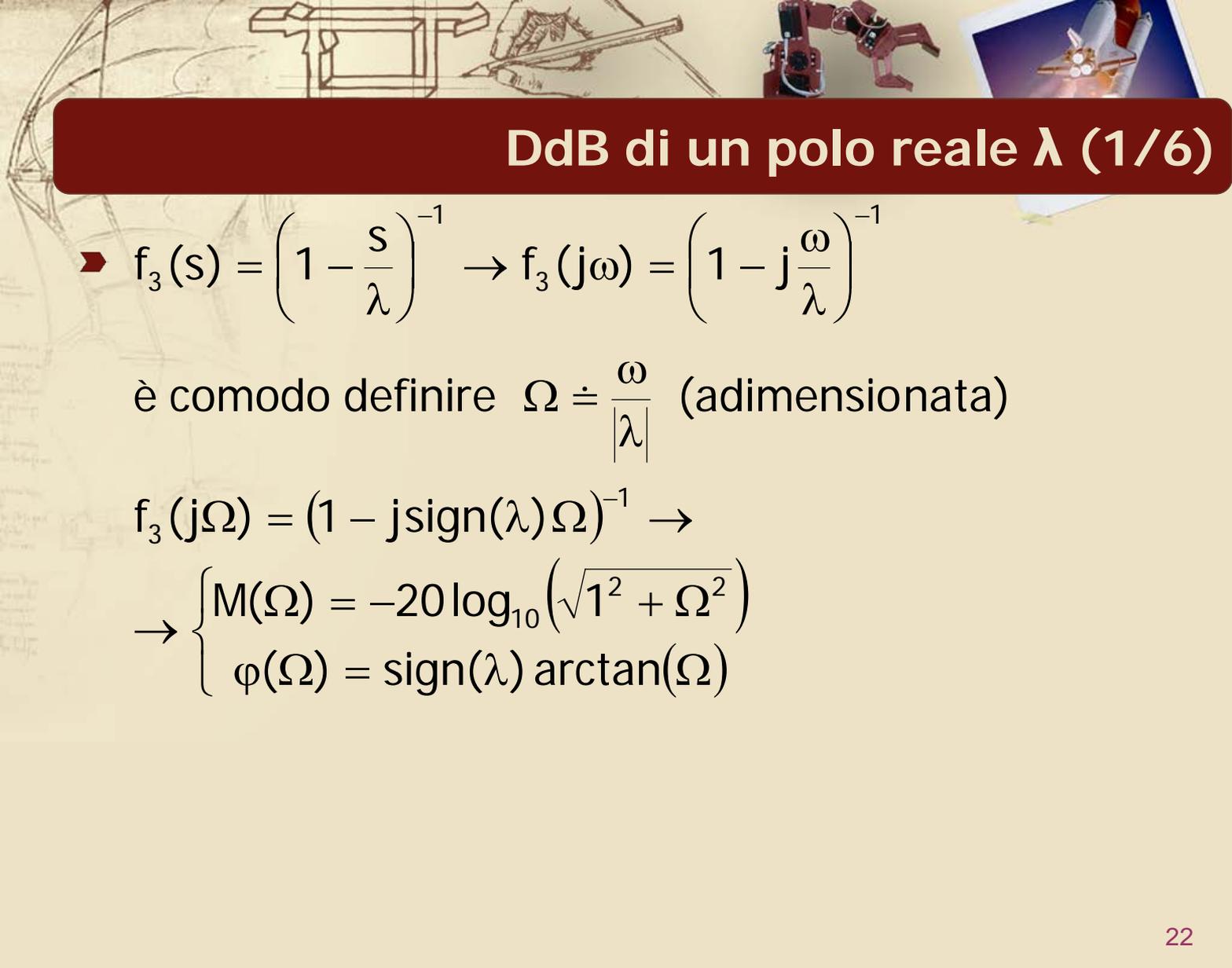


DdB di un polo multiplo nell'origine

► Sia $f'_2(s) = \frac{K}{s^i}$, con $K > 0$

- Per $\omega = 1 \rightarrow M = K_{\text{dB}}$
- Per $\omega = i\sqrt{|K|} \rightarrow M = 0 \text{ dB}$ (cioè $1 u_{\text{nat}}$)
- Il modulo dipende linearmente da $\log_{10}(\omega)$ attraverso il coefficiente $-20i$

Il DdB del modulo è una retta con pendenza di $-20i \text{ dB/dec}$



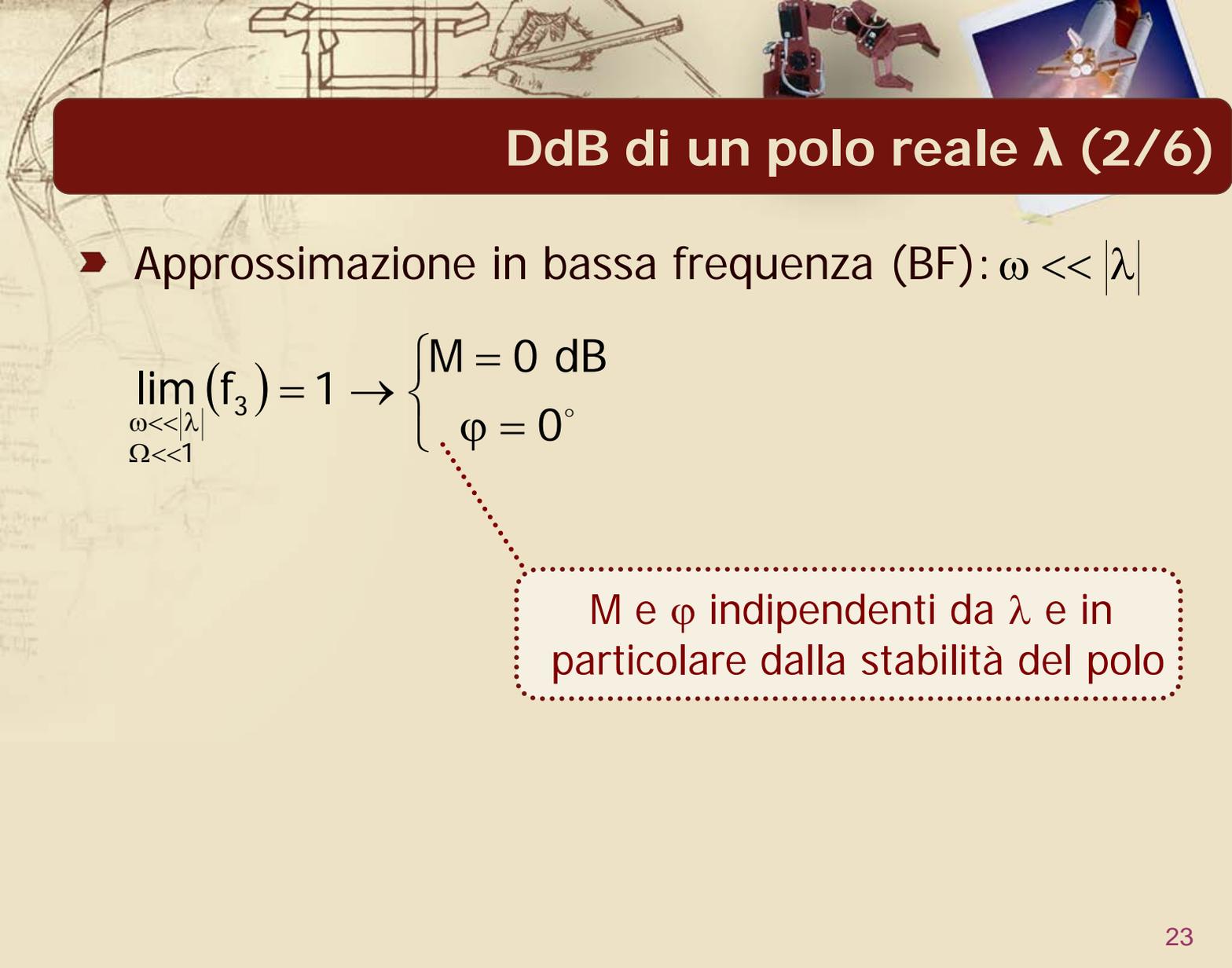
DdB di un polo reale λ (1/6)

$$\blacktriangleright f_3(s) = \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{-1} \rightarrow f_3(j\omega) = \left(1 - j\frac{\omega}{\lambda}\right)^{-1}$$

è comodo definire $\Omega \doteq \frac{\omega}{|\lambda|}$ (adimensionata)

$$f_3(j\Omega) = (1 - j\text{sign}(\lambda)\Omega)^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} M(\Omega) = -20 \log_{10}(\sqrt{1^2 + \Omega^2}) \\ \varphi(\Omega) = \text{sign}(\lambda) \arctan(\Omega) \end{cases}$$

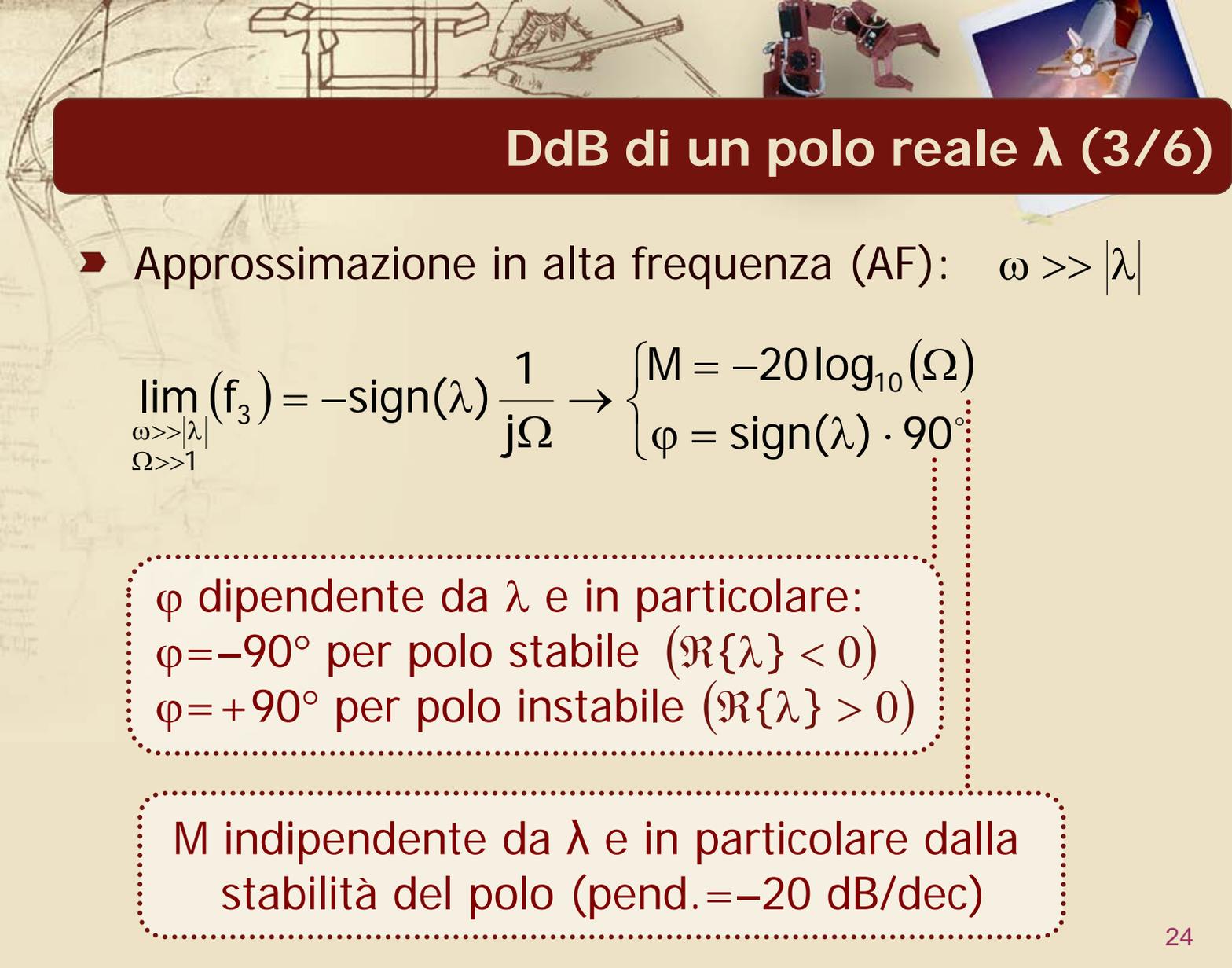


DdB di un polo reale λ (2/6)

- Approssimazione in bassa frequenza (BF): $\omega \ll |\lambda|$

$$\lim_{\substack{\omega \ll |\lambda| \\ \Omega \ll 1}} (f_3) = 1 \rightarrow \begin{cases} M = 0 \text{ dB} \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$$

M e φ indipendenti da λ e in particolare dalla stabilità del polo



DdB di un polo reale λ (3/6)

- Approssimazione in alta frequenza (AF): $\omega \gg |\lambda|$

$$\lim_{\substack{\omega \gg |\lambda| \\ \Omega \gg 1}} (f_3) = -\text{sign}(\lambda) \frac{1}{j\Omega} \rightarrow \begin{cases} M = -20 \log_{10}(\Omega) \\ \varphi = \text{sign}(\lambda) \cdot 90^\circ \end{cases}$$

φ dipendente da λ e in particolare:

$\varphi = -90^\circ$ per polo stabile ($\Re\{\lambda\} < 0$)

$\varphi = +90^\circ$ per polo instabile ($\Re\{\lambda\} > 0$)

M indipendente da λ e in particolare dalla
stabilità del polo (pend. = -20 dB/dec)



DdB di un polo reale λ (4/6)

- Calcolo nel “punto centrale” $\Omega = 1$ ovvero $\omega = |\lambda|$

$$\lim_{\substack{\omega=|\lambda| \\ \Omega=1}}(f_3) = (1 - j\text{sign}(\lambda))^{-1} \rightarrow \begin{cases} M = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cong -3 \text{ dB} \\ \varphi = \text{sign}(\lambda) \cdot 45^\circ \end{cases}$$

φ dipendente da λ e in particolare:

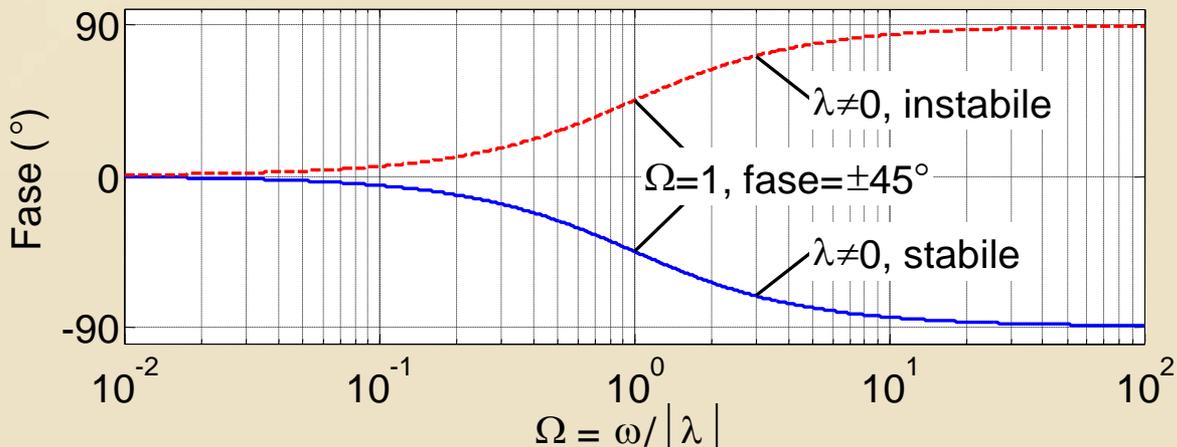
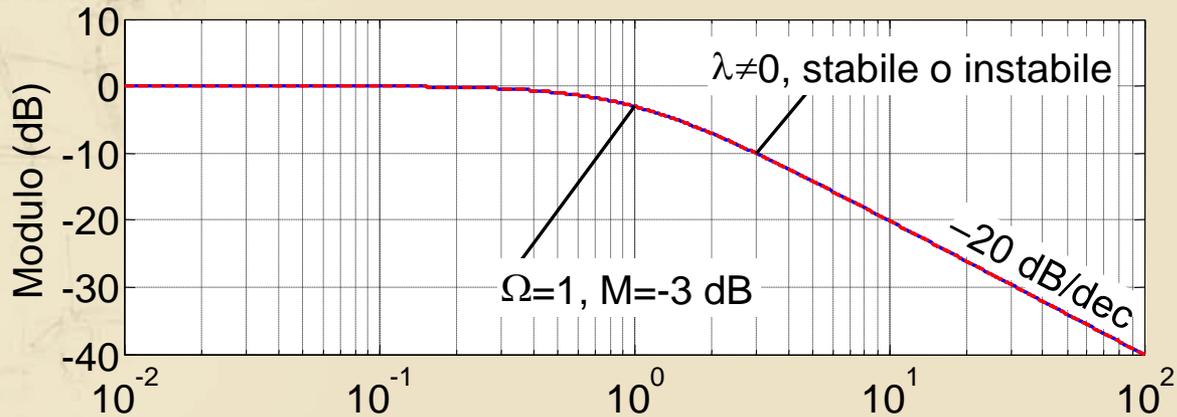
$\varphi = -45^\circ$ per polo stabile

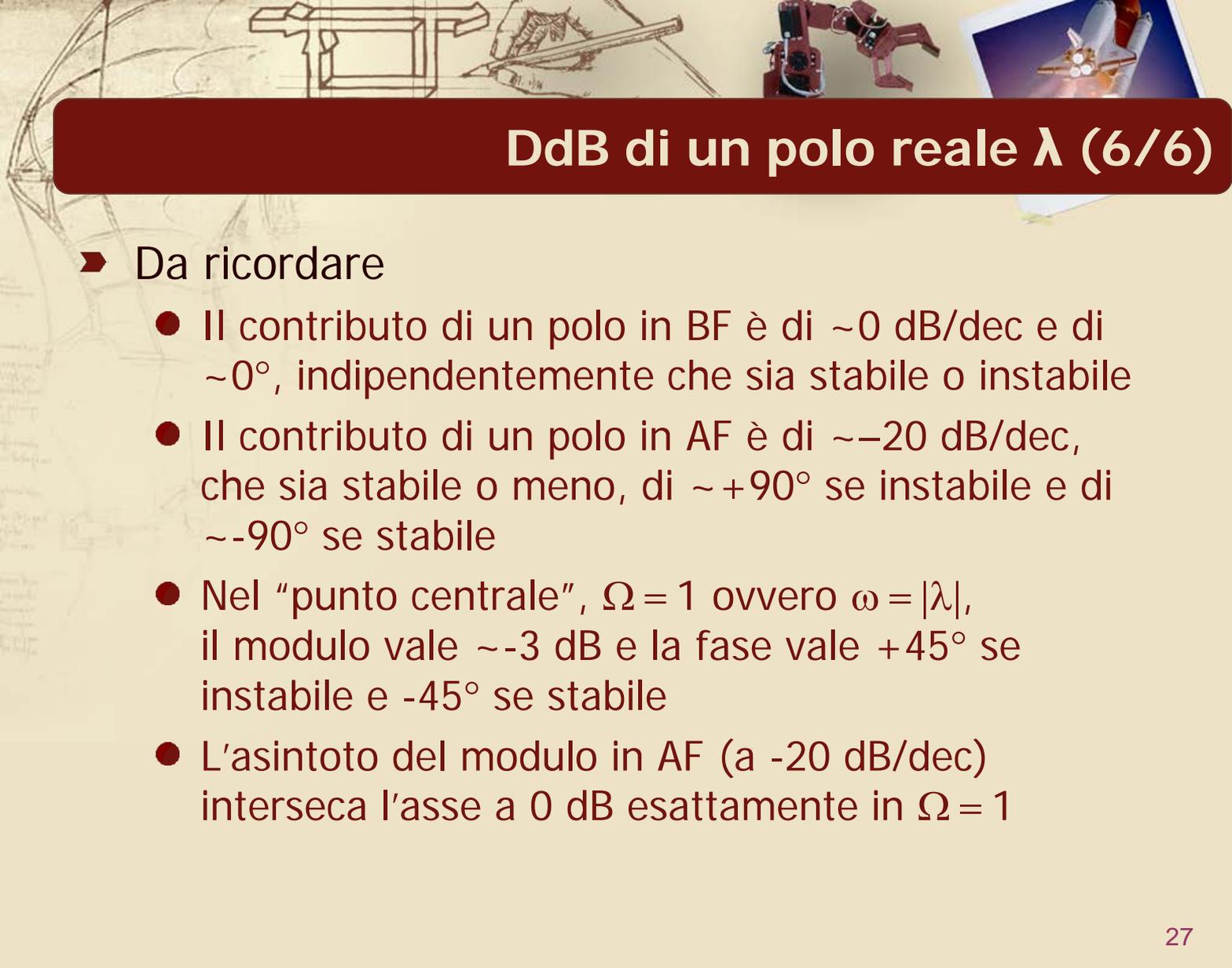
$\varphi = +45^\circ$ per polo instabile

M indipendente da λ e in particolare
dalla stabilità del polo

DdB di un polo reale λ (5/6)

Risposta in frequenza di $G=(1-s/\lambda)^{-1}$

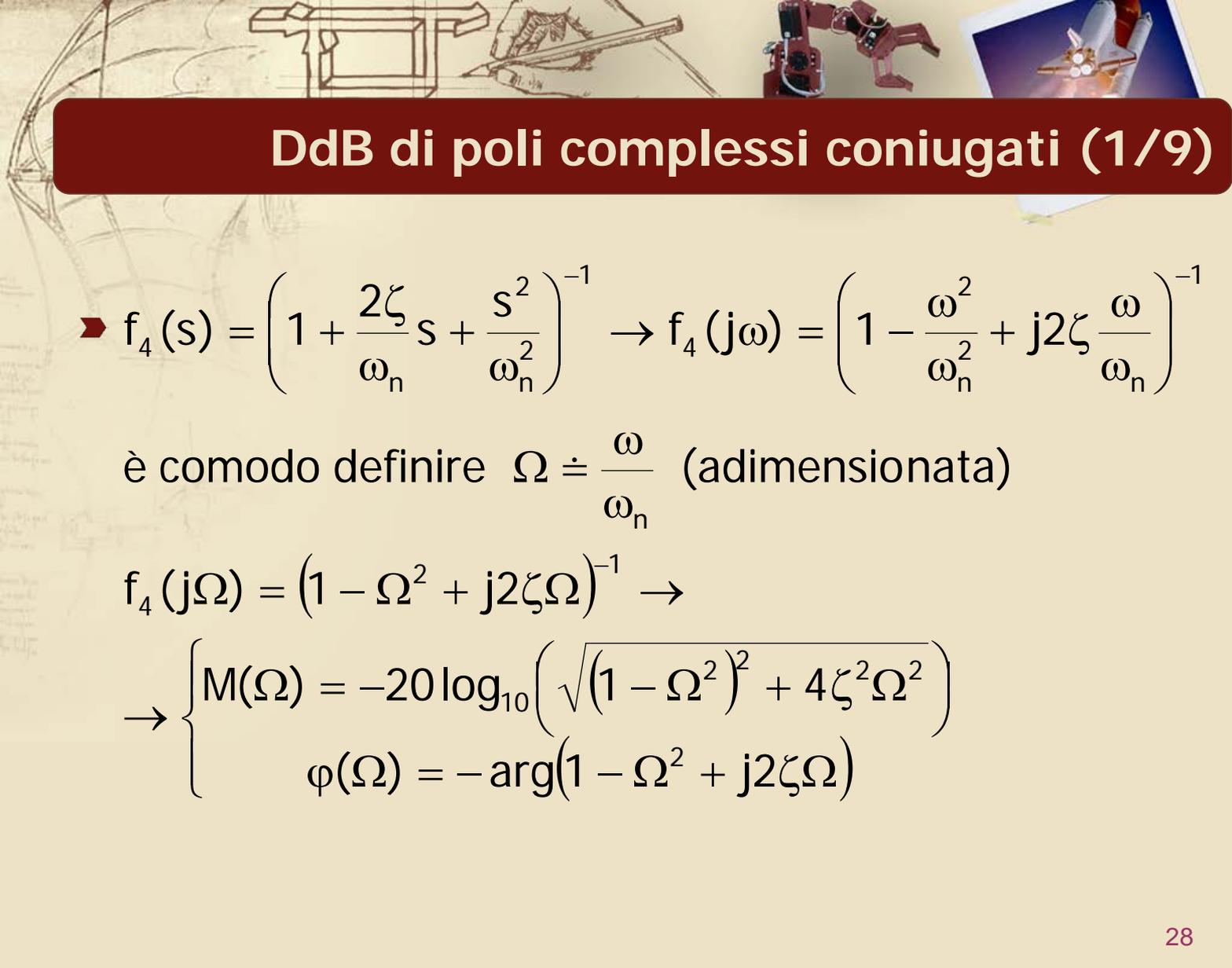




DdB di un polo reale λ (6/6)

► Da ricordare

- Il contributo di un polo in BF è di ~ 0 dB/dec e di $\sim 0^\circ$, indipendentemente che sia stabile o instabile
- Il contributo di un polo in AF è di ~ -20 dB/dec, che sia stabile o meno, di $\sim +90^\circ$ se instabile e di $\sim -90^\circ$ se stabile
- Nel “punto centrale”, $\Omega = 1$ ovvero $\omega = |\lambda|$, il modulo vale ~ -3 dB e la fase vale $+45^\circ$ se instabile e -45° se stabile
- L’asintoto del modulo in AF (a -20 dB/dec) interseca l’asse a 0 dB esattamente in $\Omega = 1$



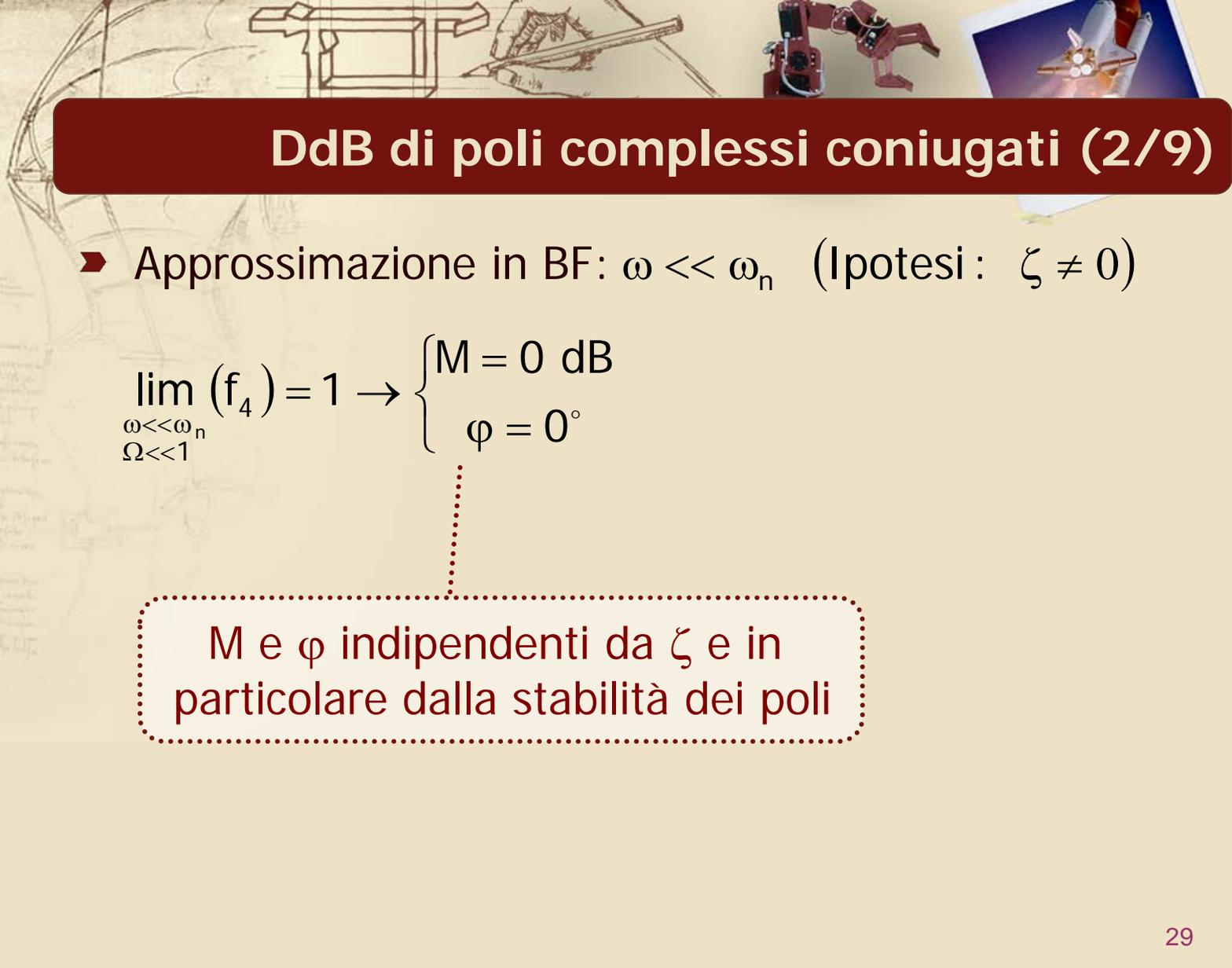
DdB di poli complessi coniugati (1/9)

$$\rightarrow f_4(s) = \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{-1} \rightarrow f_4(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$$

è comodo definire $\Omega \doteq \frac{\omega}{\omega_n}$ (adimensionata)

$$f_4(j\Omega) = \left(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega\right)^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} M(\Omega) = -20 \log_{10} \left(\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2 \Omega^2} \right) \\ \varphi(\Omega) = -\arg(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega) \end{cases}$$



DdB di poli complessi coniugati (2/9)

- Approssimazione in BF: $\omega \ll \omega_n$ (Ipotesi: $\zeta \neq 0$)

$$\lim_{\substack{\omega \ll \omega_n \\ \Omega \ll 1}} (f_4) = 1 \rightarrow \begin{cases} M = 0 \text{ dB} \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$$

M e φ indipendenti da ζ e in particolare dalla stabilità dei poli

DdB di poli complessi coniugati (3/9)

- Approssimazione in AF: $\omega \gg \omega_n$ (Ipotesi: $\zeta \neq 0$)

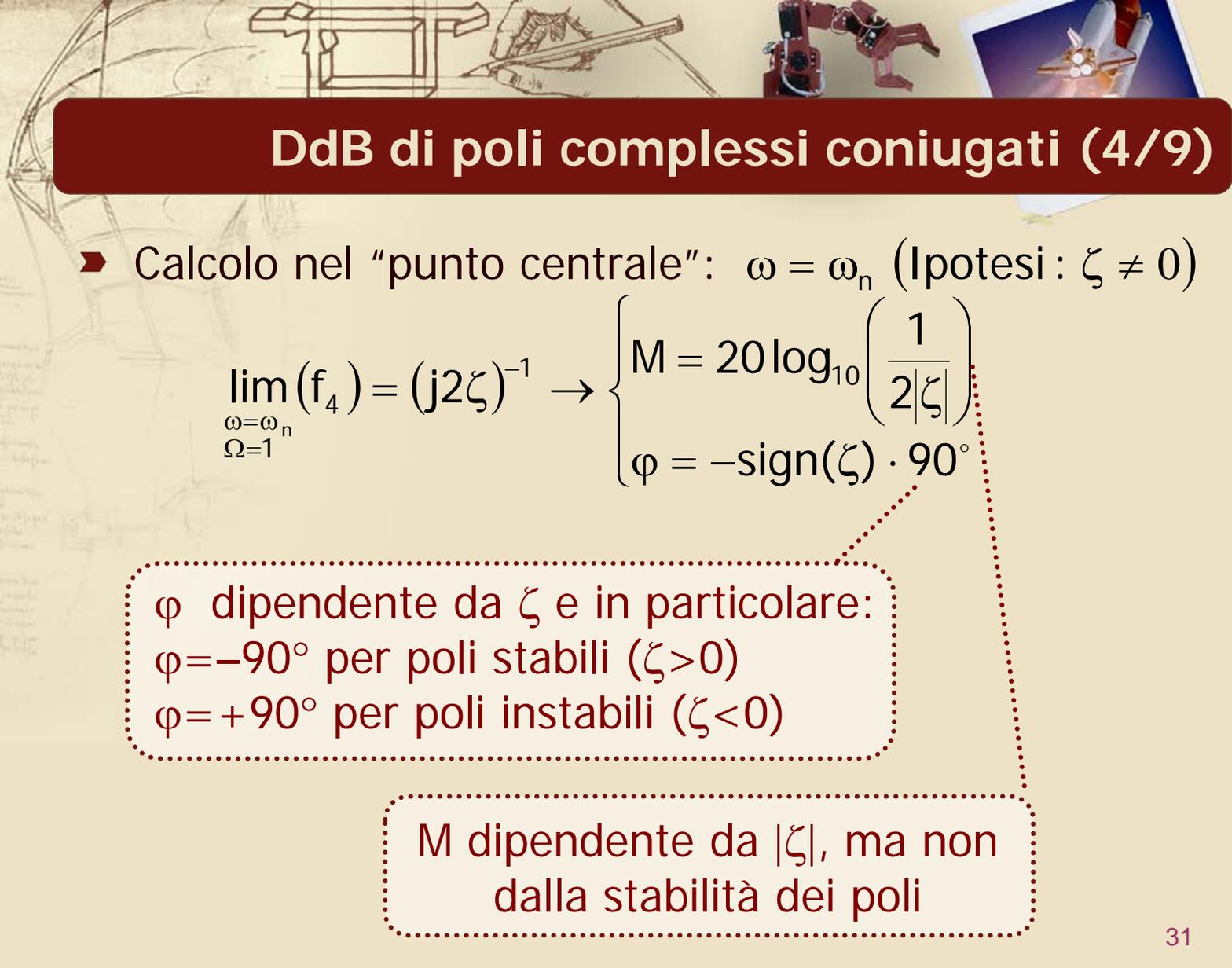
$$\lim_{\substack{\omega \gg \omega_n \\ \Omega \gg 1}} (f_4) = (-\Omega^2 + j2\zeta\Omega)^{-1} \rightarrow \begin{cases} M = -40 \log_{10}(\Omega) \\ \varphi = -\text{sign}(\zeta) \cdot 180^\circ \end{cases}$$

φ dipendente da ζ e in particolare:

$\varphi = -180^\circ$ per poli stabili ($\zeta > 0$)

$\varphi = +180^\circ$ per poli instabili ($\zeta < 0$)

M indipendente da ζ e in particolare dalla stabilità dei poli. Pendenza = -40 dB/dec



DdB di poli complessi coniugati (4/9)

- Calcolo nel “punto centrale”: $\omega = \omega_n$ (Ipotesi: $\zeta \neq 0$)

$$\lim_{\substack{\omega=\omega_n \\ \Omega=1}} (f_4) = (j2\zeta)^{-1} \rightarrow \begin{cases} M = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{2|\zeta|} \right) \\ \varphi = -\text{sign}(\zeta) \cdot 90^\circ \end{cases}$$

φ dipendente da ζ e in particolare:

$\varphi = -90^\circ$ per poli stabili ($\zeta > 0$)

$\varphi = +90^\circ$ per poli instabili ($\zeta < 0$)

M dipendente da $|\zeta|$, ma non
dalla stabilità dei poli

DdB di poli complessi coniugati (5/9)

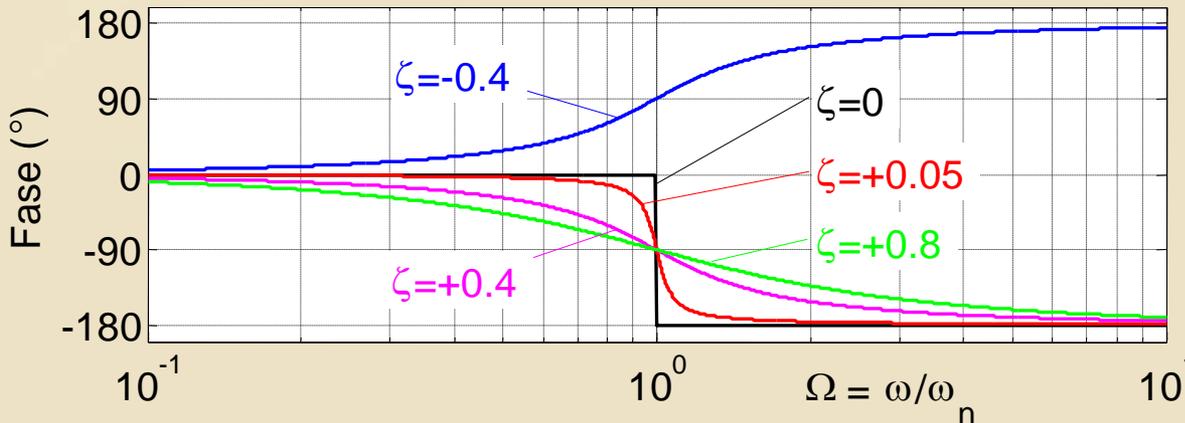
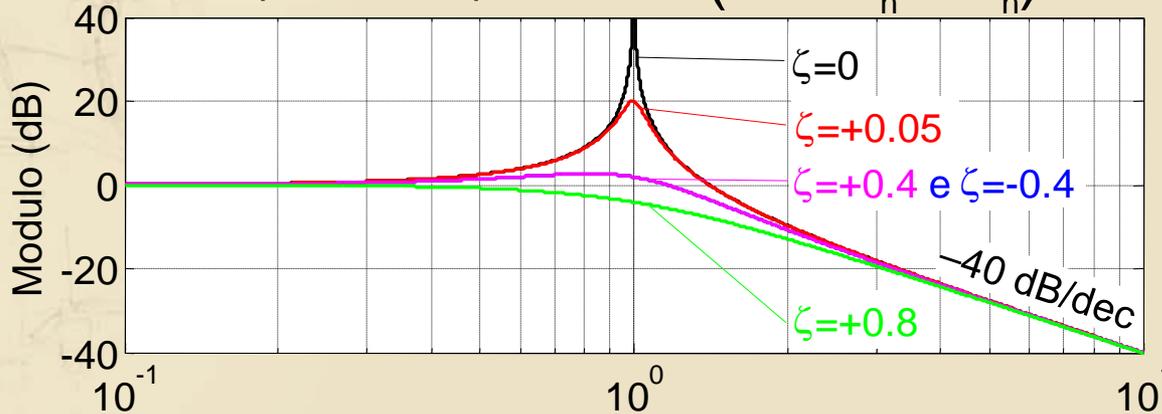
► Caso particolare: $\zeta = 0$

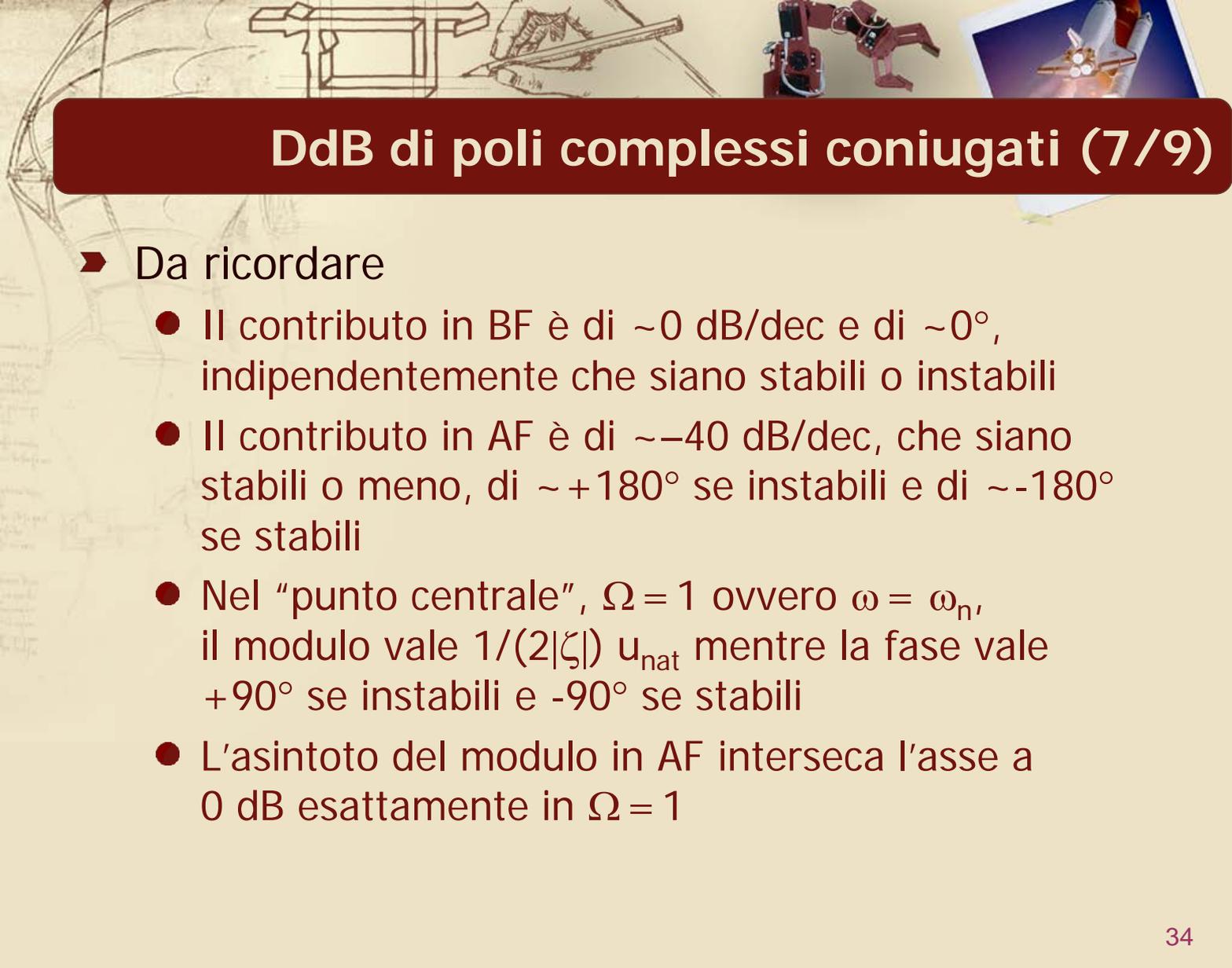
$$f_4|_{\zeta=0} = (1 - \Omega^2)^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M = -20 \log_{10} |1 - \Omega^2| = \begin{cases} \cong 0 & \text{in BF} \\ \cong -40 \log_{10}(\Omega) & \text{in AF} \\ \rightarrow \infty & \text{per } \Omega \rightarrow 1^\pm \end{cases} \\ \varphi = \begin{cases} 0^\circ & \forall \Omega < 1 \\ \pm 180^\circ & \forall \Omega > 1 \\ \text{indeterm. per } & \Omega = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

DdB di poli complessi coniugati (6/9)

Risposta in frequenza di $G = (1 + 2\zeta s/\omega_n + s^2/\omega_n^2)^{-1}$

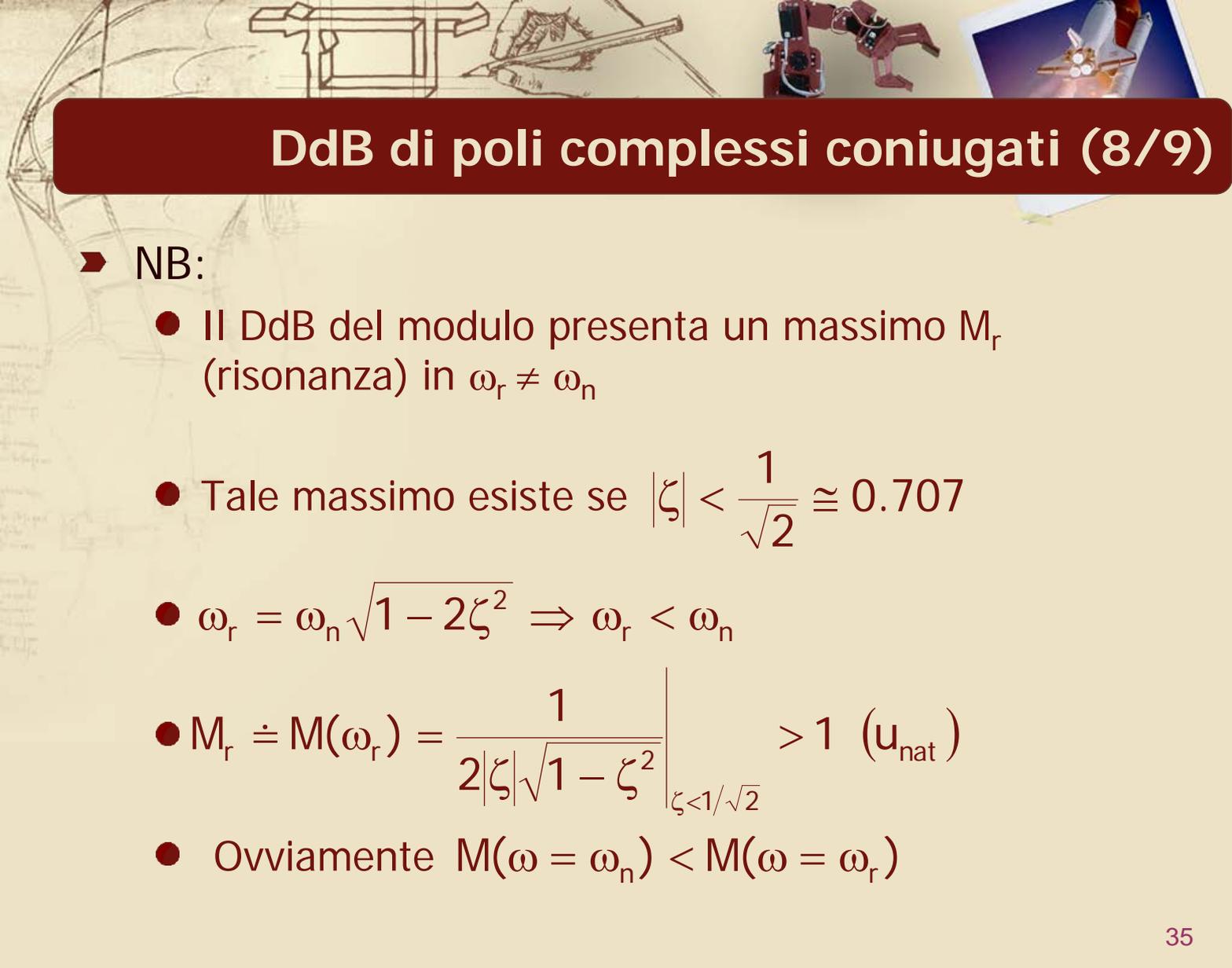




DdB di poli complessi coniugati (7/9)

► Da ricordare

- Il contributo in BF è di ~ 0 dB/dec e di $\sim 0^\circ$, indipendentemente che siano stabili o instabili
- Il contributo in AF è di ~ -40 dB/dec, che siano stabili o meno, di $\sim +180^\circ$ se instabili e di $\sim -180^\circ$ se stabili
- Nel “punto centrale”, $\Omega = 1$ ovvero $\omega = \omega_n$, il modulo vale $1/(2|\zeta|) u_{\text{nat}}$ mentre la fase vale $+90^\circ$ se instabili e -90° se stabili
- L’asintoto del modulo in AF interseca l’asse a 0 dB esattamente in $\Omega = 1$



DdB di poli complessi coniugati (8/9)

► NB:

- Il DdB del modulo presenta un massimo M_r (risonanza) in $\omega_r \neq \omega_n$

- Tale massimo esiste se $|\zeta| < \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$

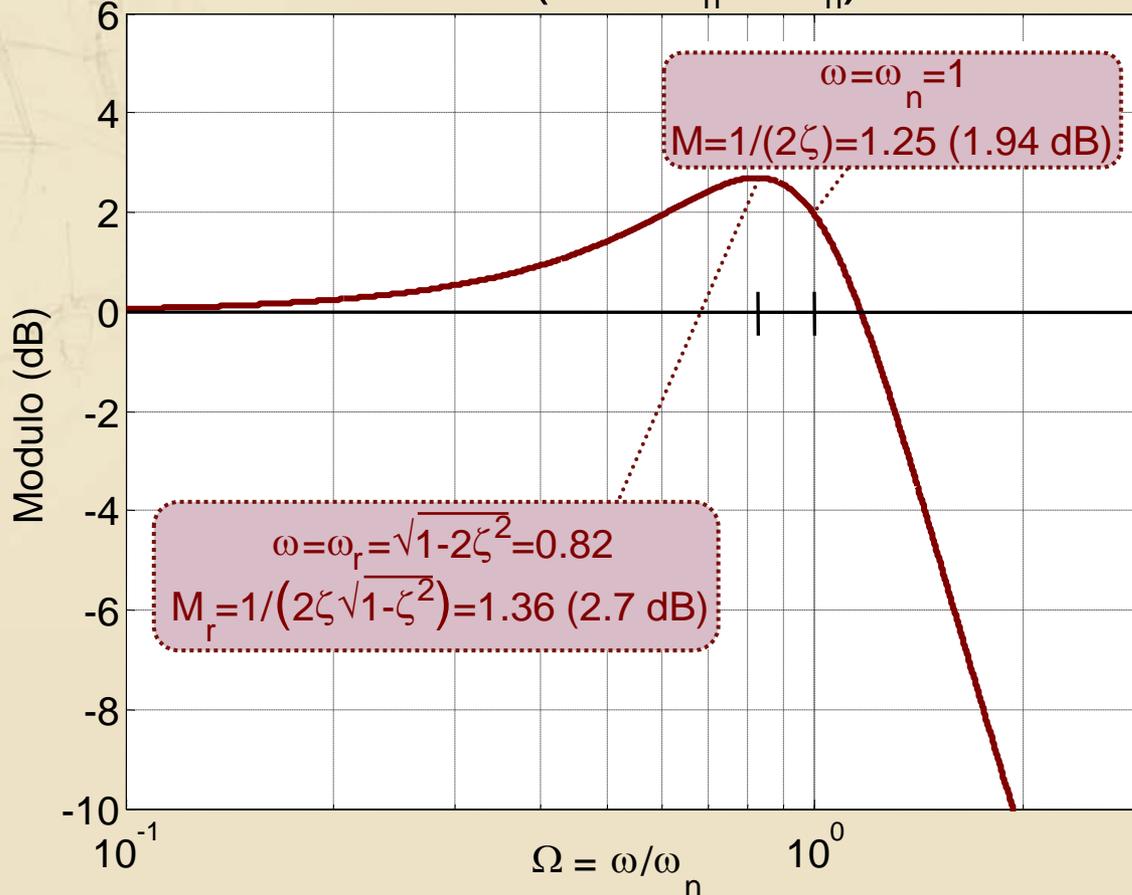
- $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \Rightarrow \omega_r < \omega_n$

- $M_r \doteq M(\omega_r) = \frac{1}{2|\zeta|\sqrt{1 - \zeta^2}} \Big|_{\zeta < 1/\sqrt{2}} > 1 \text{ (} u_{\text{nat}} \text{)}$

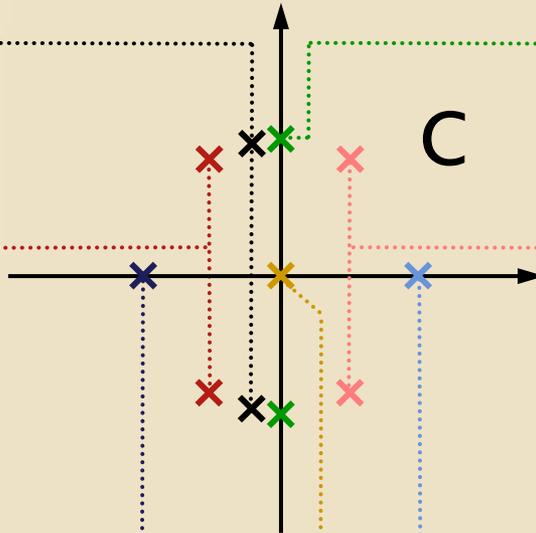
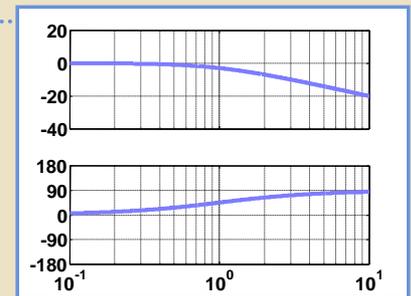
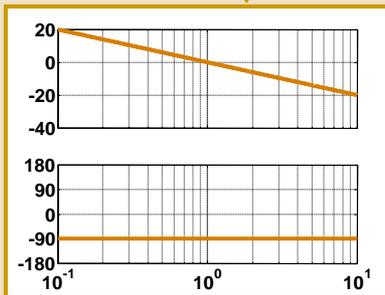
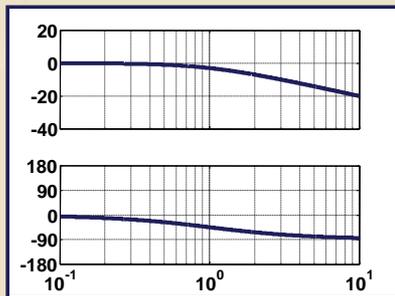
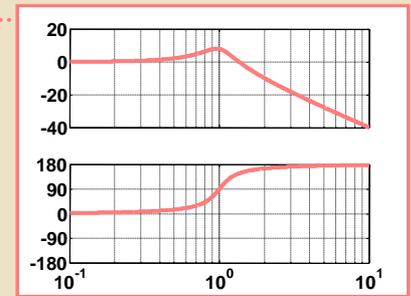
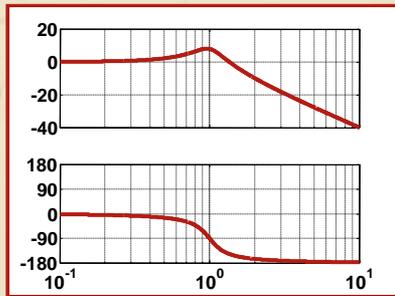
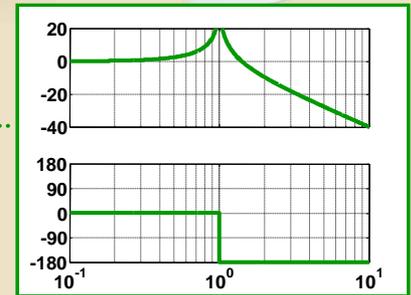
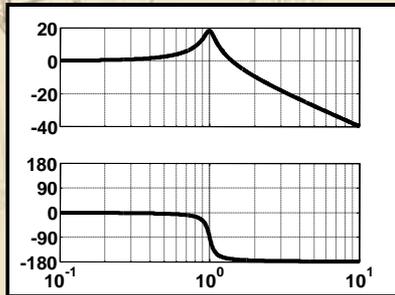
- Ovviamente $M(\omega = \omega_n) < M(\omega = \omega_r)$

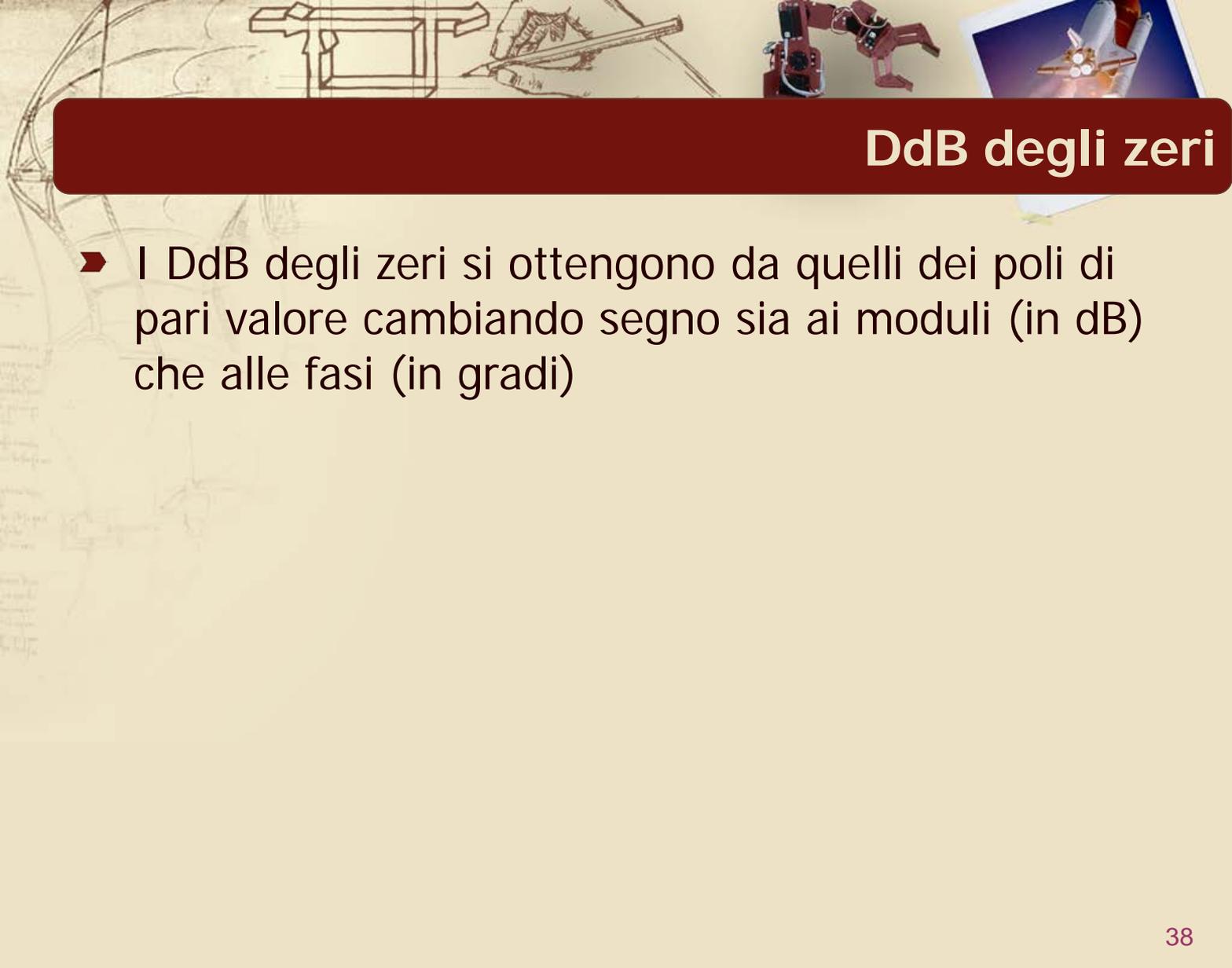
DdB di poli complessi coniugati (9/9)

Risposta in frequenza di $G = (1 + 2\zeta s/\omega_n + s^2/\omega_n^2)^{-1}$, con $\zeta = 0.4$ e $\omega_n = 1$



DdB dei poli – specchio riassuntivo





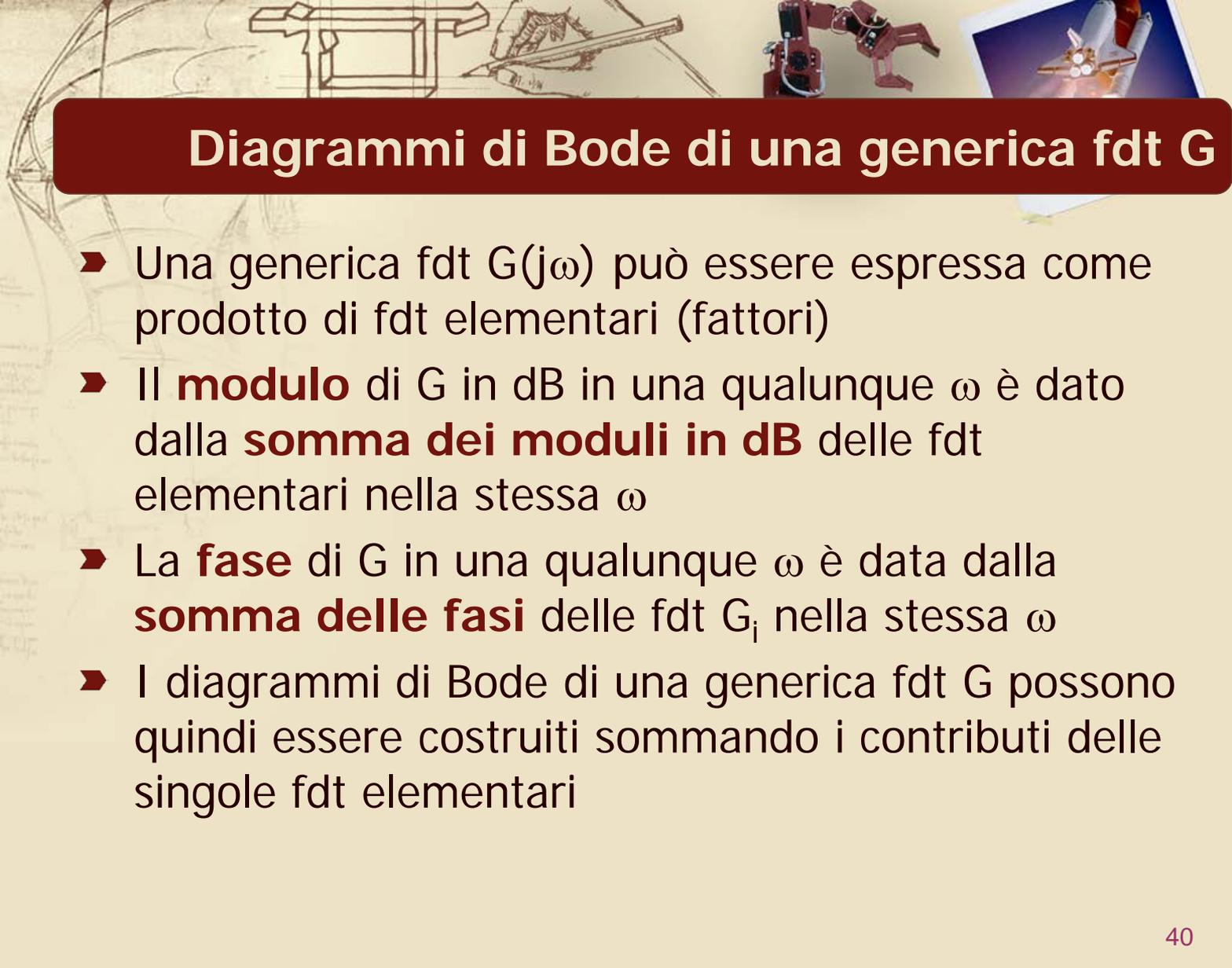
DdB degli zeri

- I DdB degli zeri si ottengono da quelli dei poli di pari valore cambiando segno sia ai moduli (in dB) che alle fasi (in gradi)



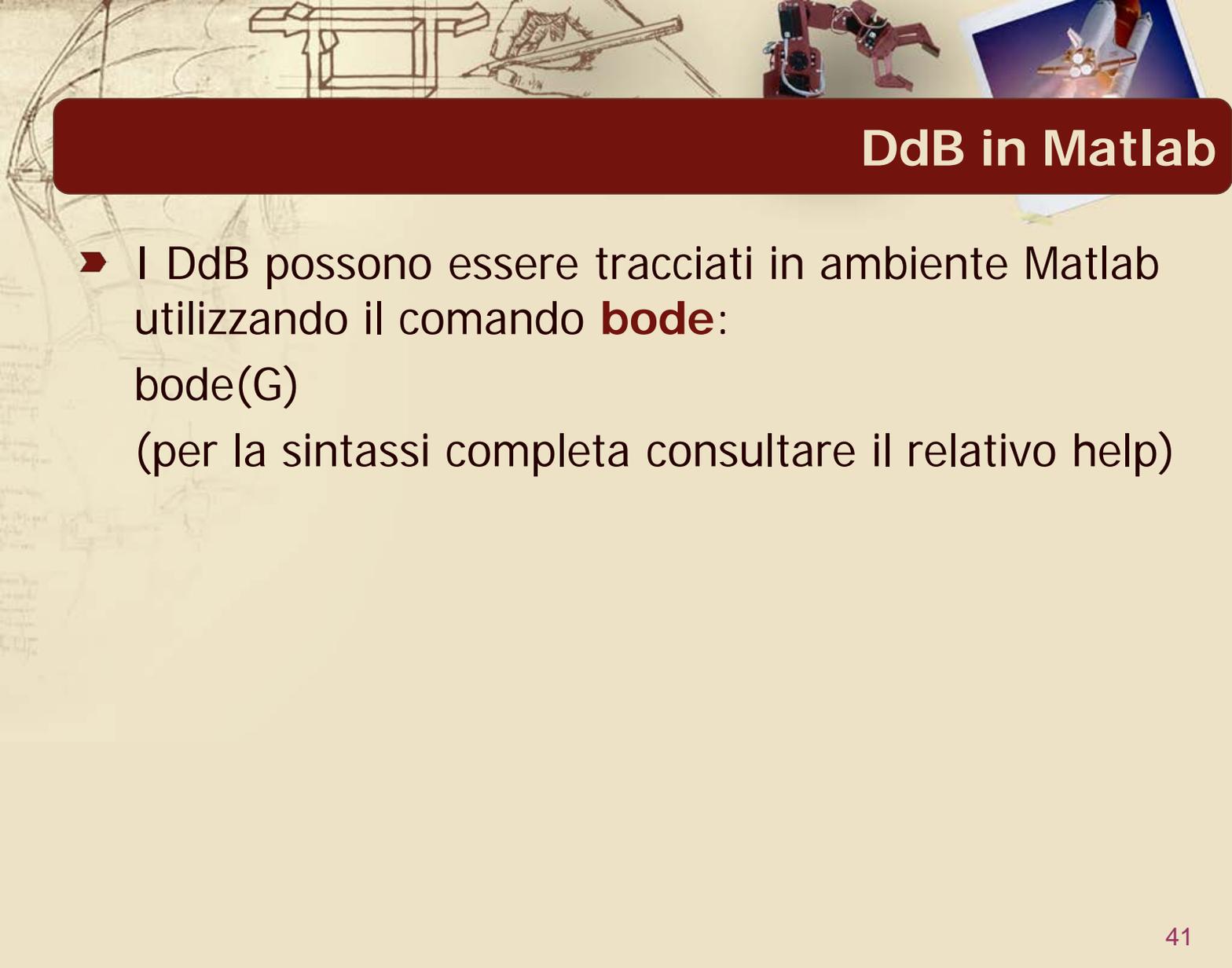
Osservazioni importanti

- ▶ I DdB dei poli (zeri) di molteplicità i si ottengono da quelli del polo (zero) semplice moltiplicando i valori del modulo e della fase per i
- ▶ Il DdB del modulo tende a ∞ dB (∞u_{nat}) \Leftrightarrow
 \Leftrightarrow c'è almeno un polo sull'asse immaginario (del piano complesso)
 - Polo reale in 0, semplice o multiplo (in tal caso il modulo $\rightarrow \infty$ per $\omega \rightarrow 0$)
 - Coppia di poli immaginari coniugati in $\pm j\omega_0$, semplice o multipla (in tal caso il modulo $\rightarrow \infty$ per $\omega \rightarrow \omega_0$ e la fase presenta una discontinuità di $\pm 180^\circ$ per $\omega = \omega_0$)



Diagrammi di Bode di una generica fdt G

- ▶ Una generica fdt $G(j\omega)$ può essere espressa come prodotto di fdt elementari (fattori)
- ▶ Il **modulo** di G in dB in una qualunque ω è dato dalla **somma dei moduli in dB** delle fdt elementari nella stessa ω
- ▶ La **fase** di G in una qualunque ω è data dalla **somma delle fasi** delle fdt G_i nella stessa ω
- ▶ I diagrammi di Bode di una generica fdt G possono quindi essere costruiti sommando i contributi delle singole fdt elementari



DdB in Matlab

- I DdB possono essere tracciati in ambiente Matlab utilizzando il comando **bode**:
bode(G)
(per la sintassi completa consultare il relativo help)