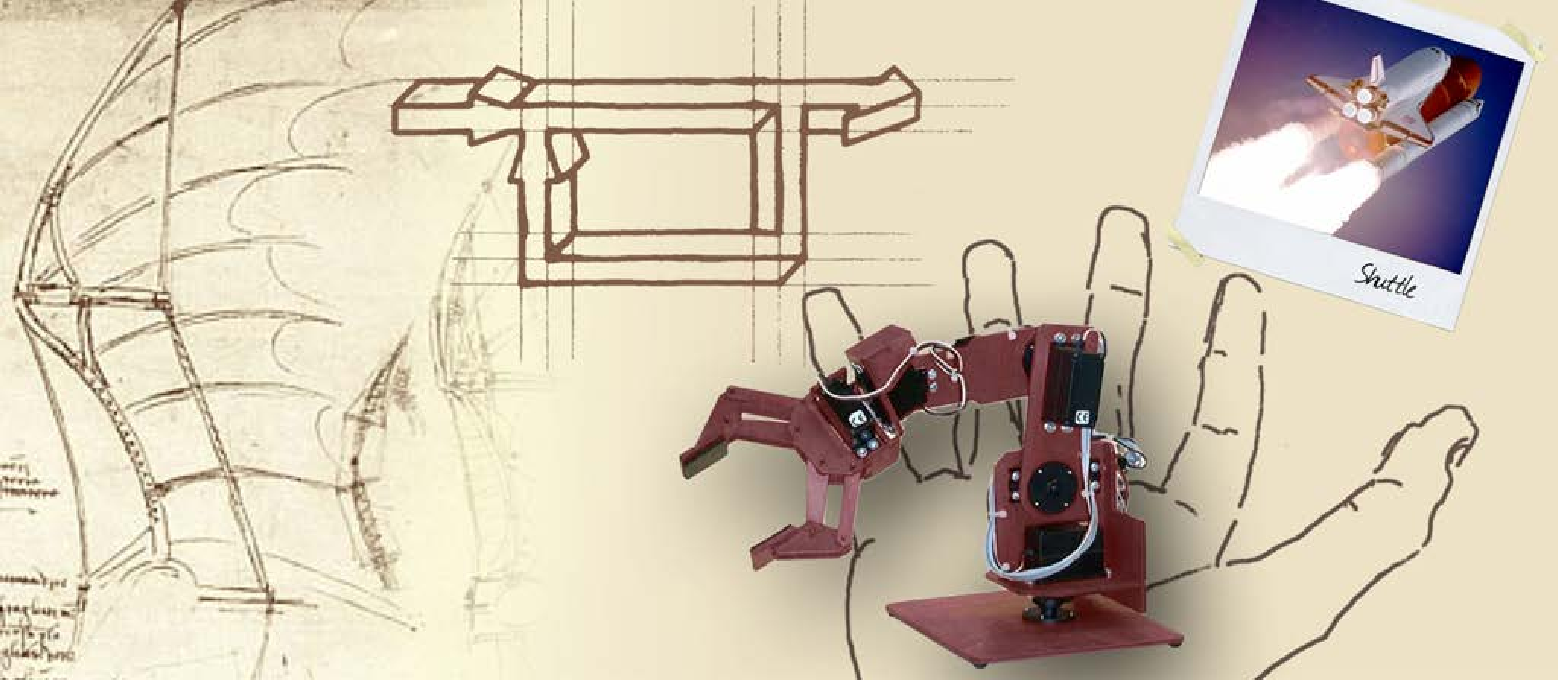


Reiezione di disturbi in regime permanente

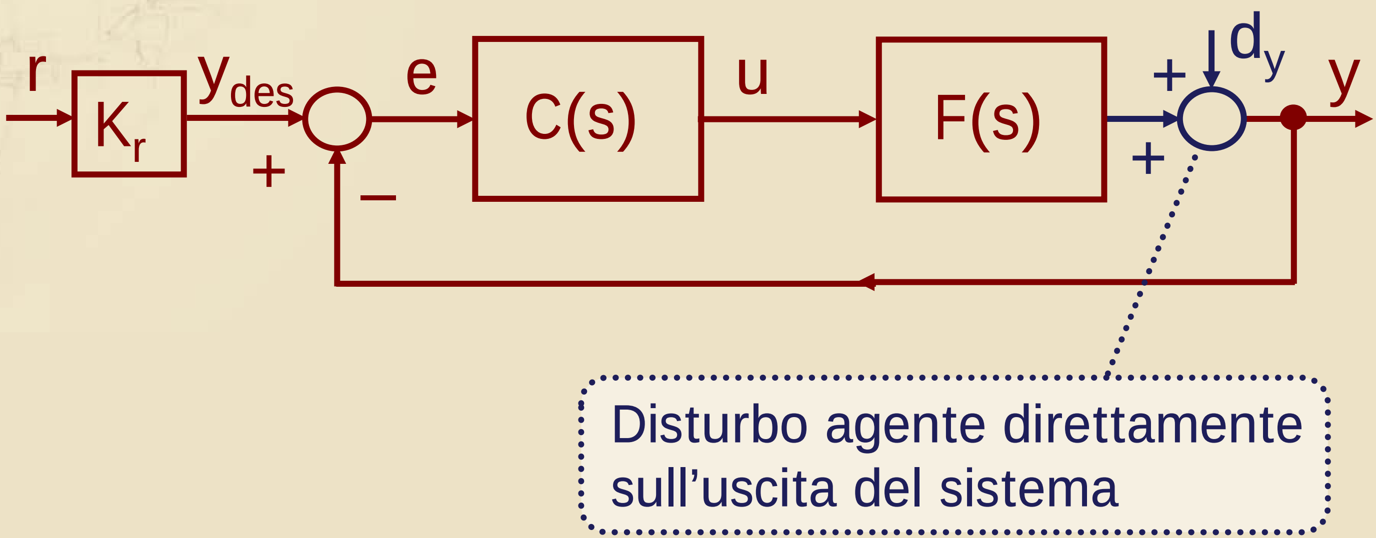
Tipicità dei disturbi

La presenza di disturbi (1/6)

- Un **disturbo** è costituito da un **segnale indesiderato** che agisce sul sistema modificandone il comportamento dinamico e quindi l'andamento dell'uscita
- I disturbi possono essere generati da svariate cause, fra cui ad esempio:
  - Il rumore dei dispositivi elettronici interni al sistema da controllare e/o presenti negli attuatori e trasduttori impiegati
  - Elementi "fisici" del sistema, quali il carico variabile di un braccio robotico, il vento per un'antenna radar, l'attrito in un sistema meccanico, ecc.

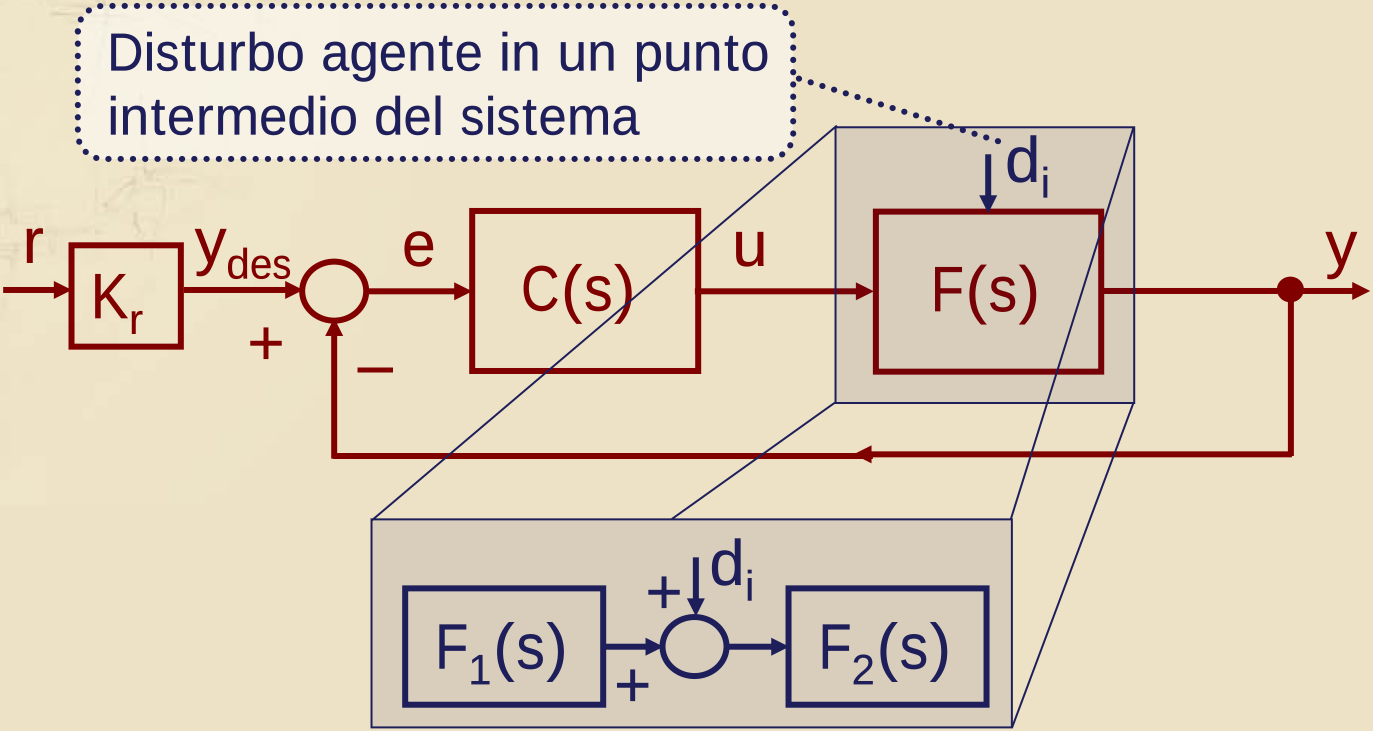
La presenza di disturbi (2/6)

- A seconda dei casi il disturbo può entrare in punti diversi dello schema di controllo in retroazione:



La presenza di disturbi (3/6)

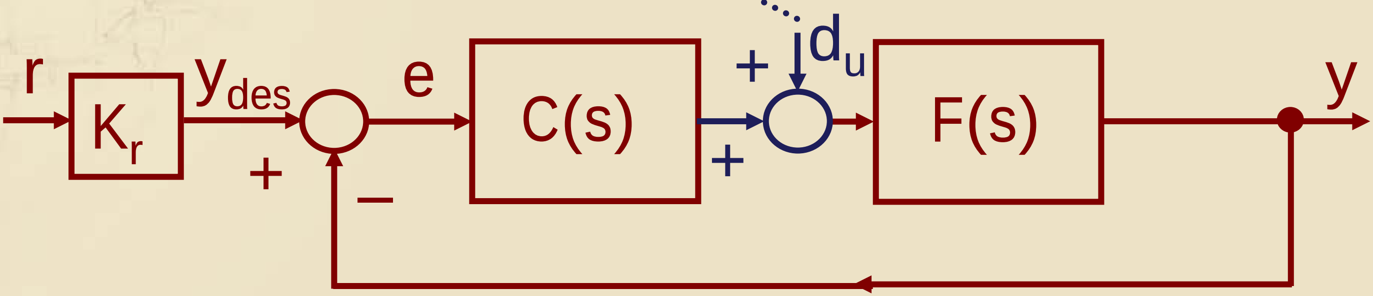
- A seconda dei casi il disturbo può entrare in punti diversi dello schema di controllo in retroazione:



La presenza di disturbi (4/6)

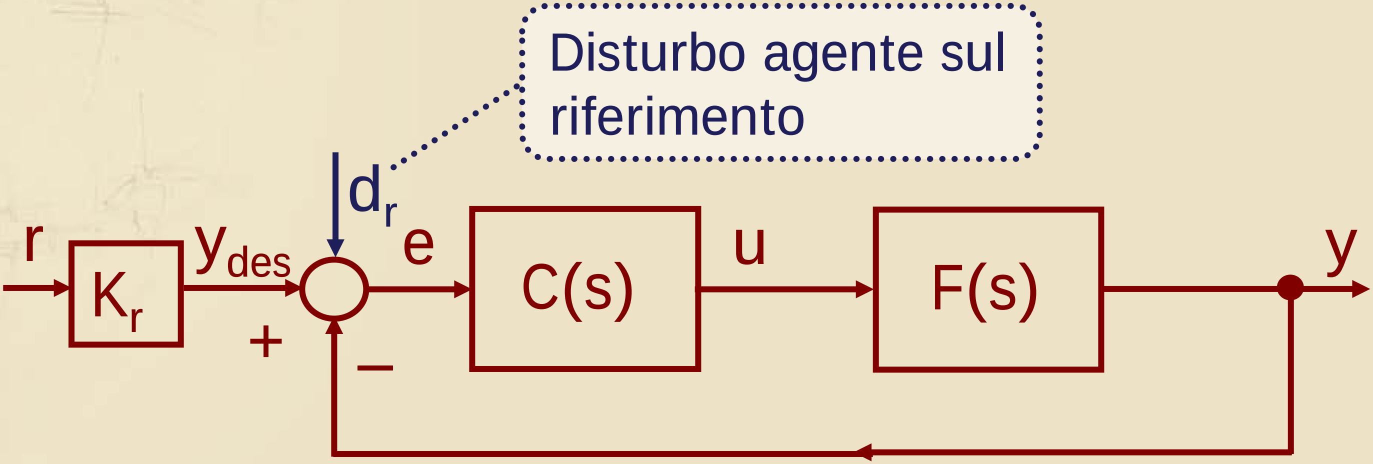
- A seconda dei casi il disturbo può entrare in punti diversi dello schema di controllo in retroazione:

Disturbo agente sul comando



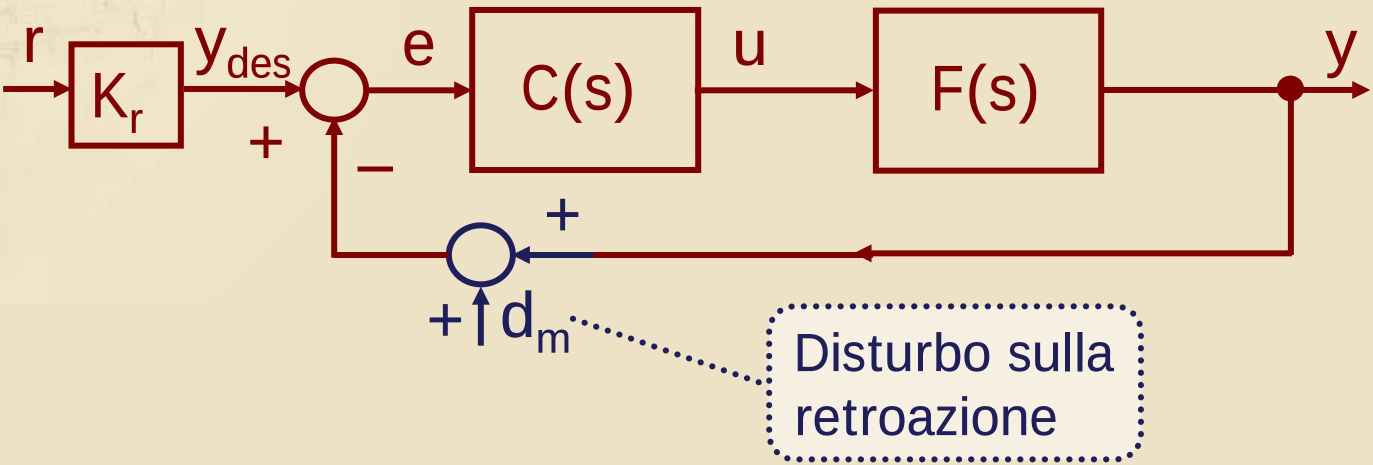
La presenza di disturbi (5/6)

- A seconda dei casi il disturbo può entrare in punti diversi dello schema di controllo in retroazione:



La presenza di disturbi (6/6)

- A seconda dei casi il disturbo può entrare in punti diversi dello schema di controllo in retroazione:

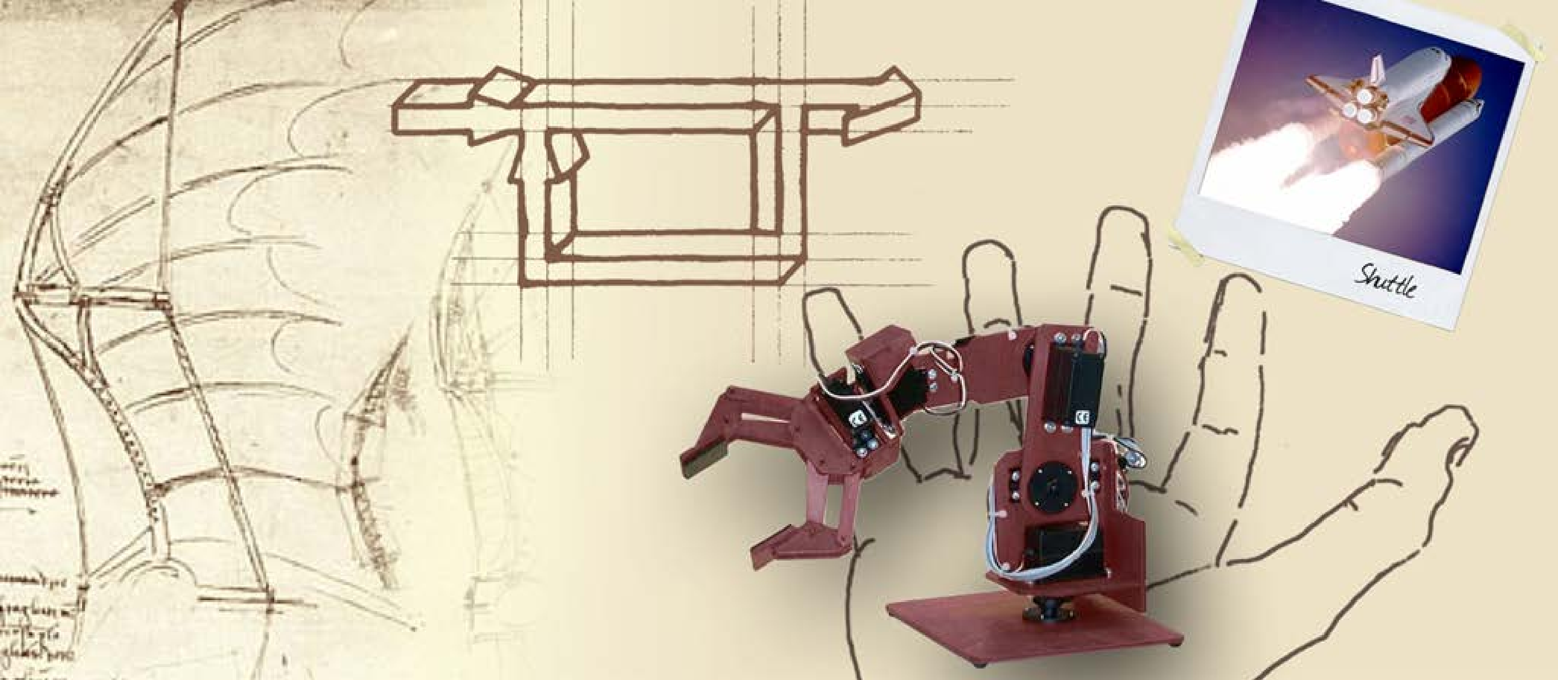


Disturbi polinomiali e sinusoidali (1/2)

- È di particolare interesse considerare gli effetti di disturbi descritti nel dominio del tempo da **funzioni polinomiali** (tipicamente di grado zero o uno) **o sinusoidali**
  - Un **disturbo costante** (**polinomio di ordine zero**) può essere utilizzato per rappresentare un offset sull'uscita disponibile o sul comando applicato, così come disturbi di natura fisica: ad esempio una variazione di carico su un braccio robotico genera un disturbo di coppia a gradino

Disturbi polinomiali e sinusoidali (2/2)

- Un **disturbo a rampa** (**polinomio di primo grado**, tipicamente caratterizzato da coefficiente angolare piccolo) può essere utilizzato per rappresentare una “deriva” del segnale in oggetto
- Un **disturbo sinusoidale** può essere utilizzato per rappresentare la componente principale di rumore di un dispositivo. In generale i disturbi sinusoidali sono presi in considerazione per tenere conto di segnali di disturbo generici, le cui componenti in frequenza siano riconducibili ai segnali sinusoidali considerati



Reiezione di disturbi in regime permanente

Effetti sull’uscita in regime permanente di disturbi polinomiali

Valutazione degli effetti dei disturbi (1/3)

- L'**effetto sull'uscita in regime permanente** di un **disturbo polinomiale** dipende dalle seguenti caratteristiche:
  - La **posizione** in cui il disturbo entra sull'anello e conseguentemente la **funzione di trasferimento fra il disturbo e l'uscita**
  - Il **tipo** ed il **guadagno stazionario** dei blocchi presenti sull'anello
- Questi elementi, insieme al **grado del disturbo polinomiale**, determinano l'entità degli effetti sull'uscita in regime permanente o la totale reiezione del disturbo

Valutazione degli effetti dei disturbi (2/3)

- L'analisi viene svolta isolando l'effetto di ogni singolo disturbo, ponendo a zero il riferimento
- In caso di più disturbi, l'effetto complessivo sull'uscita in regime permanente è dato dalla somma degli effetti di tutti i disturbi presenti
- Una volta determinato l'**effetto** $y_{d,\infty}$ di un disturbo d **sull'uscita** in regime permanente, è possibile ricavare il corrispondente **errore** in regime permanente $e_{d,\infty}$ dovuto al disturbo come:

$$\boxed{e_{d,\infty} = -y_{d,\infty}}$$

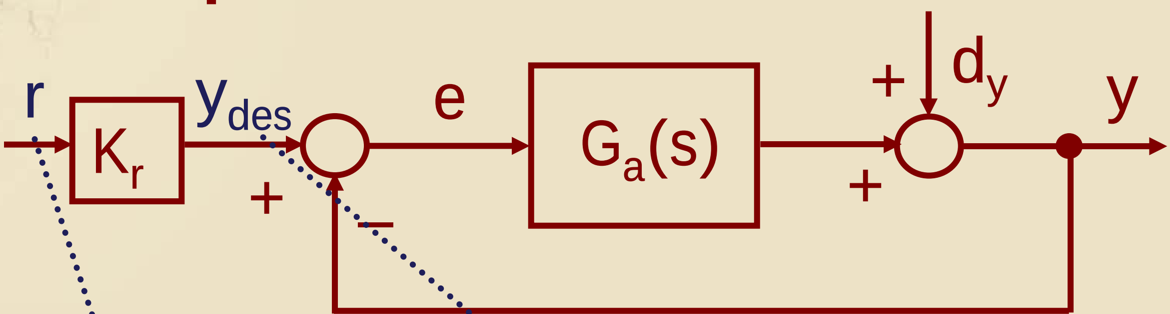
Valutazione degli effetti dei disturbi (3/3)

- In caso di applicazione di un riferimento polinomiale che dia origine ad un errore intrinseco $e_{r,\infty}$ in regime permanente, in presenza di disturbi si avrà un errore totale e_∞ calcolabile dalla **sovrapposizione degli effetti** come:

$$\boxed{e_\infty = e_{r,\infty} + e_{d,\infty}}$$

Effetti di un disturbo posto sull'uscita (1/4)

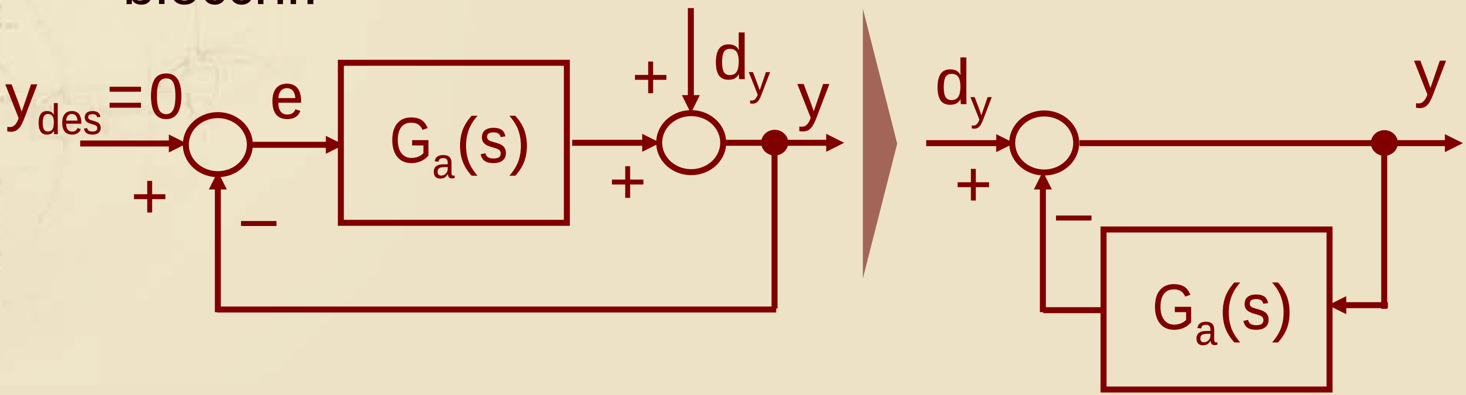
- Si consideri il consueto schema di controllo, con $G_a(s) = C(s)F(s)$ in forma minima, priva di zeri in $s = 0$, in presenza di un disturbo $\mathbf{d_y}$ sull'uscita caratterizzato nel dominio del tempo da una funzione **polinomiale**:



- Sia $r = 0$ (e quindi $y_{des} = 0$)

Effetti di un disturbo posto sull’uscita (2/4)

- La **funzione di trasferimento fra il disturbo e l’uscita** può essere calcolata manipolando lo schema ed applicando le regole di algebra dei blocchi:



$$W_{dy}(s) = \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{1+G_a(s)}$$

N.B.: $W_{dy}(s) = W_{e,y}(s)$

Effetti di un disturbo posto sull'uscita (3/4)

- Sotto l'ipotesi che sia garantita l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa (altrimenti non esisterebbe regime permanente!), è possibile valutare l'effetto del disturbo sull'uscita in regime permanente applicando il **teorema del valore finale**:

$$\boxed{\begin{aligned} y_{dy,\infty} &= \lim_{t\to\infty}\{y_{dy}(t)\} = \lim_{s\to 0}\{s\cdot y_{dy}(s)\} \\ &= \lim_{s\to 0}\{s\cdot W_{dy}(s)\cdot d(s)\} \end{aligned}}$$

ove con y_{dy} si intende l'uscita del sistema dovuta alla sola presenza del disturbo d_y

Effetti di un disturbo posto sull'uscita (4/4)

- Applicando il teorema del valore finale ai diversi casi possibili a seconda
  - Del tipo di sistema
  - Del grado del disturbo polinomiale

  si ottiene l'analisi completa degli effetti di un disturbo polinomiale sull'uscita in regime permanente e si determina quindi la possibilità di reiettarlo totalmente o comunque di attenuarlo in modo soddisfacente

Disturbo costante sull'uscita (1/2)

- Sia **$d_y(t) = D_y$** (disturbo costante $\Rightarrow$ **polinomio di grado zero**) $\Rightarrow$ **$d_y(s) = D_y/s$**
- Dal teorema del valore finale si ottiene:

$$y_{dy,\infty} = \lim_{s\to 0} \left\{ \cancel{s} \cdot \frac{1}{1+G_a(s)} \cdot \frac{D_y}{\cancel{s}} \right\}$$

  - Se $G_a(s)$ è di **tipo 0**, l'**effetto** del disturbo sull'uscita in regime permanente è **finito**, **non nullo** e vale:

$$\boxed{y_{dy,\infty} = \frac{D_y}{1+K_{Ga}}}$$

Guadagno stazionario di $G_a(s)$

Disturbo costante sull'uscita (2/2)

- Se $G_a(s)$ è **almeno di tipo 1**, l'**effetto** del disturbo sull'uscita in regime permanente è **nullo**

$$y_{dy,\infty} = \lim_{s \to 0} \left\{ \frac{1}{1 + G_a'(s)/s} \cdot D_y \right\} = 0$$

Un sistema è **astatico** ad un **disturbo costante** posto sull'uscita se è **almeno di tipo 1**

Effetto nullo del disturbo sull'uscita in regime permanente

Disturbo a rampa sull'uscita (1/3)

- Sia $\mathbf{d_y(t) = \alpha_{dy} t}$ (disturbo a rampa $\Rightarrow$ **polinomio di primo grado**) $\Rightarrow$ $\mathbf{d_y(s) = \alpha_{dy} / s^2}$
- Dal teorema del valore finale si ottiene:

$$y_{dy,\infty} = \lim_{s \to 0} \left\{ \cancel{s} \cdot \frac{1}{1 + G_a(s)} \cdot \frac{\alpha_{dy}}{s^{\cancel{2}}} \right\}$$

  - Se $G_a(s)$ è di **tipo 0**, l'**uscita** in regime permanente risulta **divergente** (la retroazione "lascia passare" il disturbo sull'uscita):

$$\boxed{y_{dy,\infty} = \infty}$$

Disturbo a rampa sull'uscita (2/3)

- Se $G_a(s)$ è di **tipo 1**, l'**effetto** del disturbo sull'uscita in regime permanente è **finito**, **non nullo** e vale:

$$y_{dy,\infty} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{1}{1+\boxed{G_a'(s)/s}}\cdot\frac{\alpha_{dy}}{s}\right\}$$

Tipo 1

$$= \lim_{s\to 0}\left\{\frac{\cancel{s}}{s+G_a'(s)}\cdot\frac{\alpha_{dy}}{\cancel{s}}\right\} = \frac{\alpha_{dy}}{\boxed{K_{Ga}}}$$

Guadagno stazionario di $G_a(s)$

Disturbo a rampa sull'uscita (3 / 3)

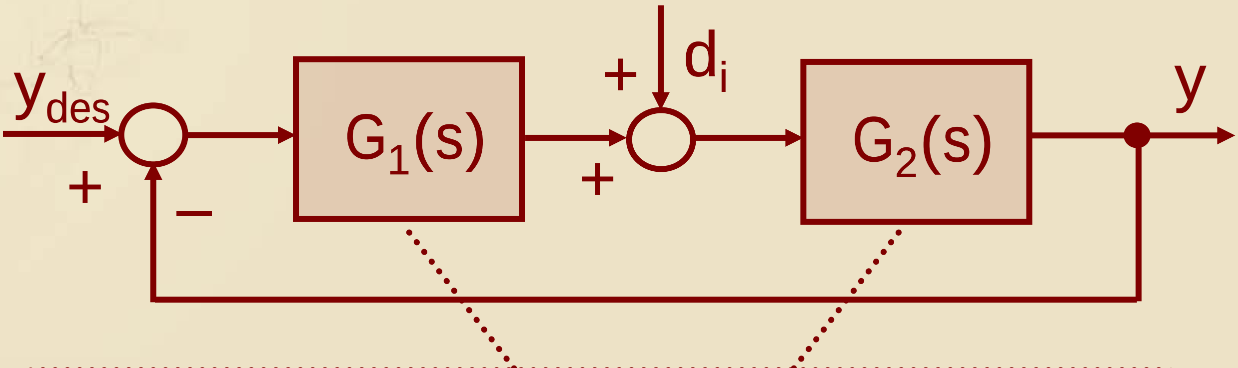
- Se $G_a(s)$ è di **almeno di tipo 2**, l'**effetto** del disturbo sull'uscita in regime permanente è **nullo**:

$$
\begin{aligned}
y_{dy,\infty} &= \lim_{s\to 0}\left\{\frac{1}{1+\underbrace{G''_a(s)/s^2}_{\text{Tipo 2}}}\cdot\frac{\alpha_{dy}}{s}\right\}\\
&= \lim_{s\to 0}\left\{\frac{s^{\cancel{2}}}{s^2+G''_a(s)}\cdot\frac{\alpha_{dy}}{\cancel{s}}\right\}=0
\end{aligned}
$$

Affinché l'**effetto** in regime permanente di un disturbo a rampa posto sull'uscita sia **nullo**, il sistema deve essere **almeno di tipo 2**

Effetti di un disturbo sul ramo diretto (1/3)

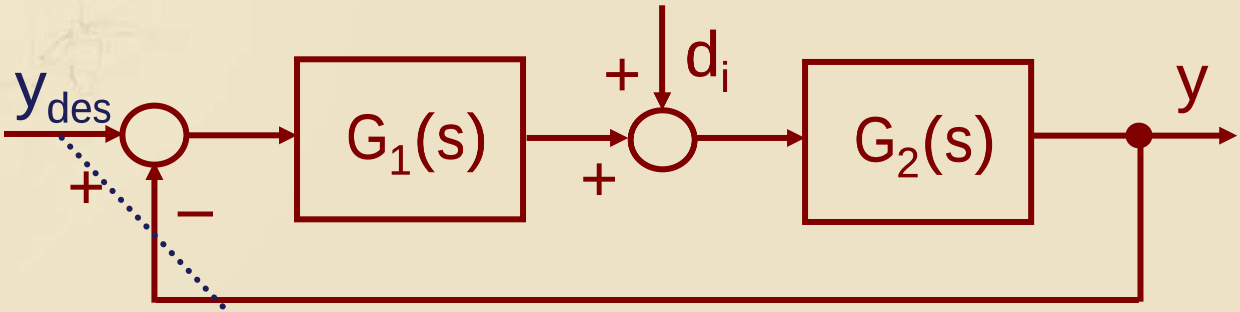
- Si consideri la presenza di un disturbo $\mathbf{d_i}$, caratterizzato nel dominio del tempo da una funzione **polinomiale**, entrante in un punto intermedio del ramo diretto



Se d_i è un disturbo sul comando, $G_1(s) = C(s)$ e $G_2(s) = F(s)$; se d_i agisce "all'interno" del sistema da controllare, $G_1(s) = C(s)F_1(s)$ e $G_2(s) = F_2(s)$

Effetti di un disturbo sul ramo diretto (1/3)

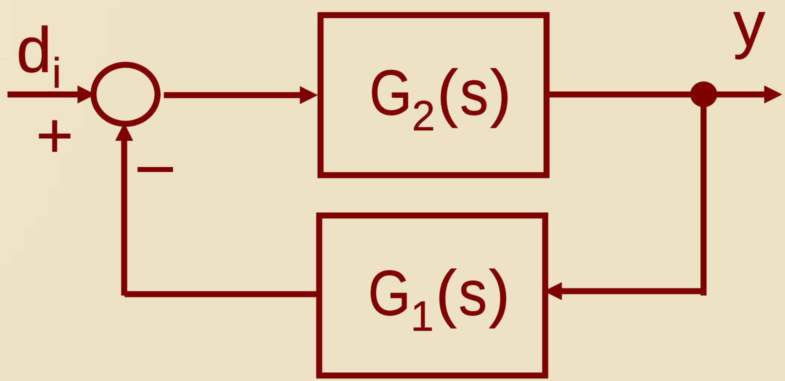
- Si consideri la presenza di un disturbo $\mathbf{d_i}$, caratterizzato nel dominio del tempo da una funzione **polinomiale**, entrante in un punto intermedio del ramo diretto



- Siano $G_1(s)$ e $G_2(s)$ in forma minima, prive di zeri in $s = 0$ e $G_a(s) = G_1(s)G_2(s)$ la funzione d'anello
- Si consideri $\boxed{y_{des} = 0}$

Effetti di un disturbo sul ramo diretto (2/3)

- La **funzione di trasferimento fra il disturbo e l'uscita** può essere calcolata applicando le regole di algebra dei blocchi allo schema ridisegnato:



$$\boxed{W_{di}(s) = \frac{y(s)}{d_i(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_a(s)}}$$

Effetti di un disturbo sul ramo diretto (3/3)

- Anche in questo caso, sotto l'ipotesi che sia garantita l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa, è possibile valutare l'effetto del disturbo sull'uscita in regime permanente applicando il **teorema del valore finale**:

$$\boxed{\begin{aligned} y_{di,\infty} &= \lim_{t\to\infty}\left\{y_{di}(t)\right\} = \lim_{s\to 0}\left\{s\cdot y_{di}(s)\right\} \\ &= \lim_{s\to 0}\left\{s\cdot W_{di}(s)\cdot d_i(s)\right\} \end{aligned}}$$

ove con y_{di} si intende l'uscita del sistema dovuta alla sola presenza del disturbo d_i

Disturbo costante lungo il ramo diretto (1/3)

- Sia $\mathbf{d_i(t) = D_i}$ (disturbo costante $\Rightarrow$ **polinomio di grado zero**) $\Rightarrow$ $\mathbf{d_i(s) = D_i / s}$
- Dal teorema del valore finale si ottiene:

$$y_{di,\infty} = \lim_{s \to 0} \left\{ \cancel{s} \cdot \frac{G_2(s)}{1 + G_a(s)} \cdot \frac{D_i}{\cancel{s}} \right\}$$

  - Se $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono entrambe di **tipo 0**, l'**effetto** del disturbo sull'uscita in regime permanente è **finito**, **non nullo** e vale:

N.B.: Dipende dai guadagni di **entrambi** i blocchi

$$\boxed{y_{di,\infty} = \frac{K_{G2} D_i}{1 + K_{G1} K_{G2}}}$$

Guadagni stazionari di $G_1(s)$ e $G_2(s)$

Disturbo costante lungo il ramo diretto (2/3)

- Se **$G_2(s)$** è **almeno di tipo 1**, ma **$G_1(s)$** è **di tipo 0**, l'**effetto** del disturbo sull'uscita in regime permanente continua ad essere **finito**, **non nullo** e vale:

$$\boxed{\begin{aligned} y_{di,\infty} &= \lim_{s\to 0} \left\{ \frac{G_2'(s)/s}{1+G_1(s)G_2'(s)/s} \cdot D_i \right\} \\ &= \lim_{s\to 0} \left\{ \frac{G_2'(s)\cdot D_i}{s+G_1(s)G_2'(s)} \right\} = \frac{D_i}{K_{G1}} \end{aligned}}$$

N.B.: Dipende dal guadagno del **solo** blocco **$G_1(s)$**

Disturbo costante lungo il ramo diretto (3/3)

- Se **$G_1(s)$** è **almeno di tipo 1**, l'**effetto** del disturbo sull'uscita in regime permanente è **nullo**, **indipendentemente dalla tipologia di $G_2(s)$**:

$$y_{di,\infty} = \lim_{s\to 0} \left\{ \frac{G_2(s)}{1 + G_1'(s)G_2(s)/s} \cdot D_i \right\}$$

$$= \lim_{s\to 0} \left\{ \frac{s \cdot G_2(s) \cdot D_i}{s + G_1'(s)G_2(s)} \right\} = 0$$

Un sistema è **astatico** ad un **disturbo costante** posto lungo il ramo diretto se nei blocchi **a monte del disturbo** c'è **almeno un polo in s = 0**

Disturbo a rampa lungo il ramo diretto (1/2)

- Sia $\mathbf{d_i(t) = \alpha_{di} t}$ (disturbo a rampa $\Rightarrow$ **polinomio di primo grado**) $\Rightarrow$ $\mathbf{d_i(s) = \alpha_{di} / s^2}$
- Dal teorema del valore finale si ottiene:

$$y_{di,\infty} = \lim_{s \to 0} \left\{ \cancel{s} \cdot \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)} \cdot \frac{\alpha_{di}}{s^{\cancel{2}}} \right\}$$

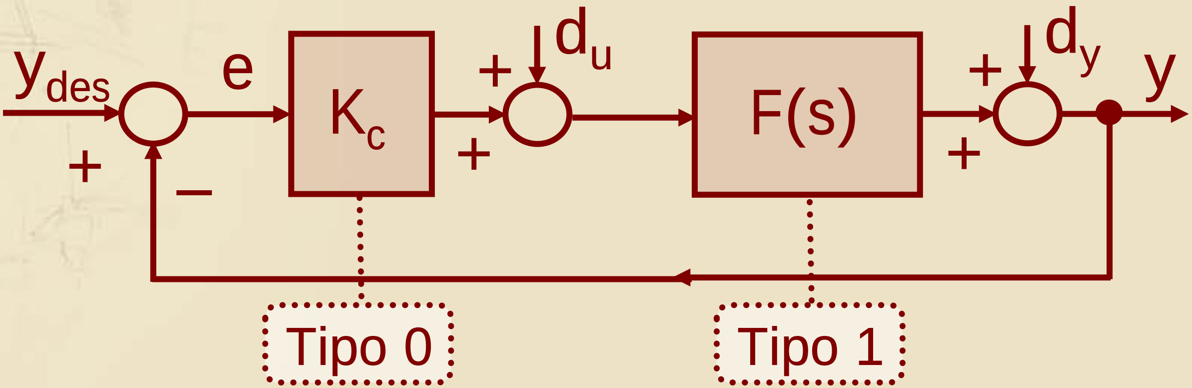
- È possibile procedere nell'analisi in modo del tutto analogo ai casi precedenti, distinguendo i **diversi casi possibili a seconda della tipologia di $G_1(s)$** (**le caratteristiche di $G_2(s)$ risultano ininfluenti**)

Disturbo a rampa lungo il ramo diretto (2/2)

- Si ottengono in particolare i seguenti risultati principali:
  - Se **$G_1(s)$ è di tipo 0**, l'**uscita** in regime permanente risulta **divergente** (la retroazione "lascia passare" il disturbo sull'uscita)
  - Se **$G_1(s)$ è di tipo 1**, l'**effetto** del disturbo sull'uscita in regime permanente è **finito**, **non nullo** e vale α_{di}/K_{G1}
  - Se **$G_1(s)$ è (almeno) di tipo 2**, l'**effetto** del disturbo sull'uscita in regime permanente è **nullo**

Esempio (1/7)

- Si consideri il seguente schema di controllo:



$$\text{con} \quad F(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}, \quad K_c = 1.5$$

N.B.: L'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa è già stata verificata

Esempio (2/7)

- Si valuti l'effetto in regime permanente per:
  - $d_u(t) = D_u = 0.1$, $d_y(t) = D_y = 0.2$

Disturbo costante preceduto da un blocco di tipo 0 e seguito da un blocco di tipo 1

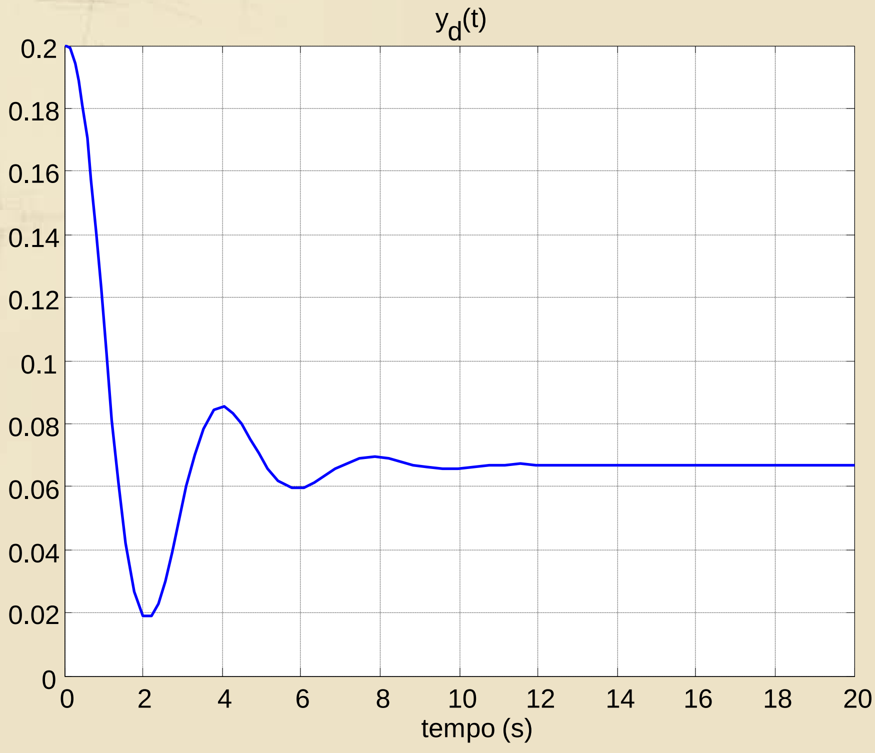
$$\Rightarrow \quad y_{du,\infty} = \frac{D_u}{K_c} = 0.0667$$

Disturbo costante preceduto da una cascata di blocchi di tipo 1

$$\Rightarrow \quad y_{dy,\infty} = 0$$

Esempio (3 / 7)

- Si valuti l'effetto in regime permanente per:
  - $d_u(t) = D_u = 0.1$, $d_y(t) = D_y = 0.2$



$$y_{du,\infty} = \frac{D_u}{K_c} = 0.0667$$

$$y_{dy,\infty} = 0$$

$$y_{d,\infty} = 0.0667$$

Esempio (4/7)

- Si valuti l'effetto in regime permanente per:
  - $d_u(t) = D_u = 0.1$, $d_y(t) = \alpha_{dy} t = 0.05t$

Come nel caso precedente

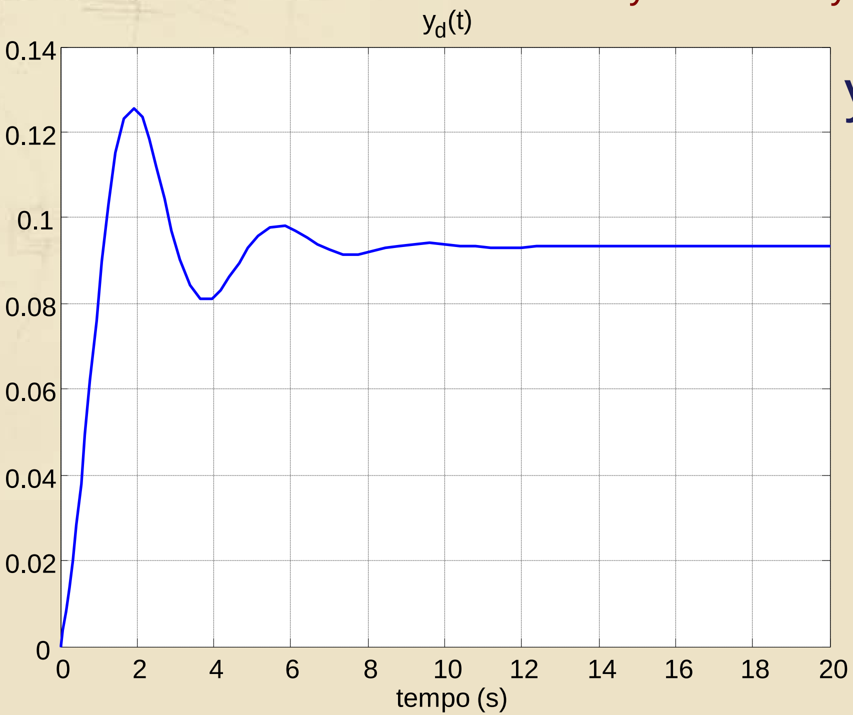
$$y_{du,\infty} = \frac{D_u}{K_c} = 0.0667$$

Disturbo a rampa preceduto da una cascata di blocchi di tipo 1

$$y_{dy,\infty} = \frac{\alpha_{dy}}{K_c \cdot K_F} = 0.0267$$

Esempio (5 / 7)

- Si valuti l'effetto in regime permanente per:
  - $d_u(t) = D_u = 0.1$, $d_y(t) = \alpha_{dy} t = 0.05t$



$$y_{du,\infty} = \frac{D_u}{K_c} = 0.0667$$

$$y_{dy,\infty} = \frac{\alpha_{dy}}{K_c \cdot K_F} = 0.0267$$

$$y_{d,\infty} = 0.0933$$

Esempio (6 / 7)

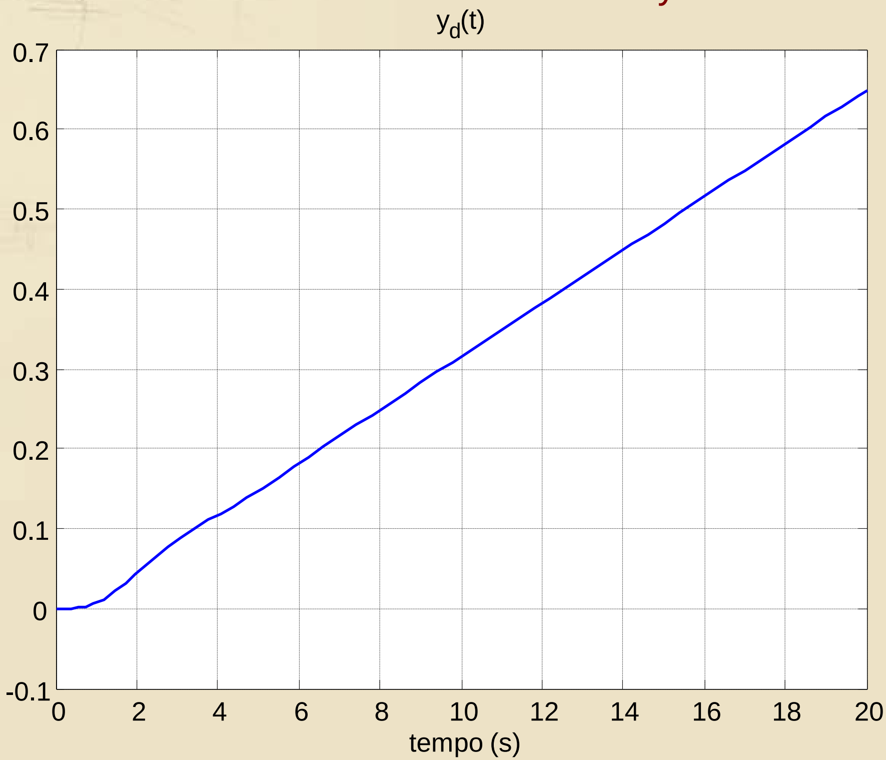
- Si valuti l'effetto in regime permanente per:
  - $d_u(t) = \alpha_{du} t = 0.05t$, $d_y(t) = 0$

Disturbo a rampa preceduto da un blocco di tipo 0 $\Rightarrow$ $y_{du,\infty} = \infty$

Disturbo nullo: nessun effetto $\Rightarrow$ $y_{dy,\infty} = 0$

Esempio (7 / 7)

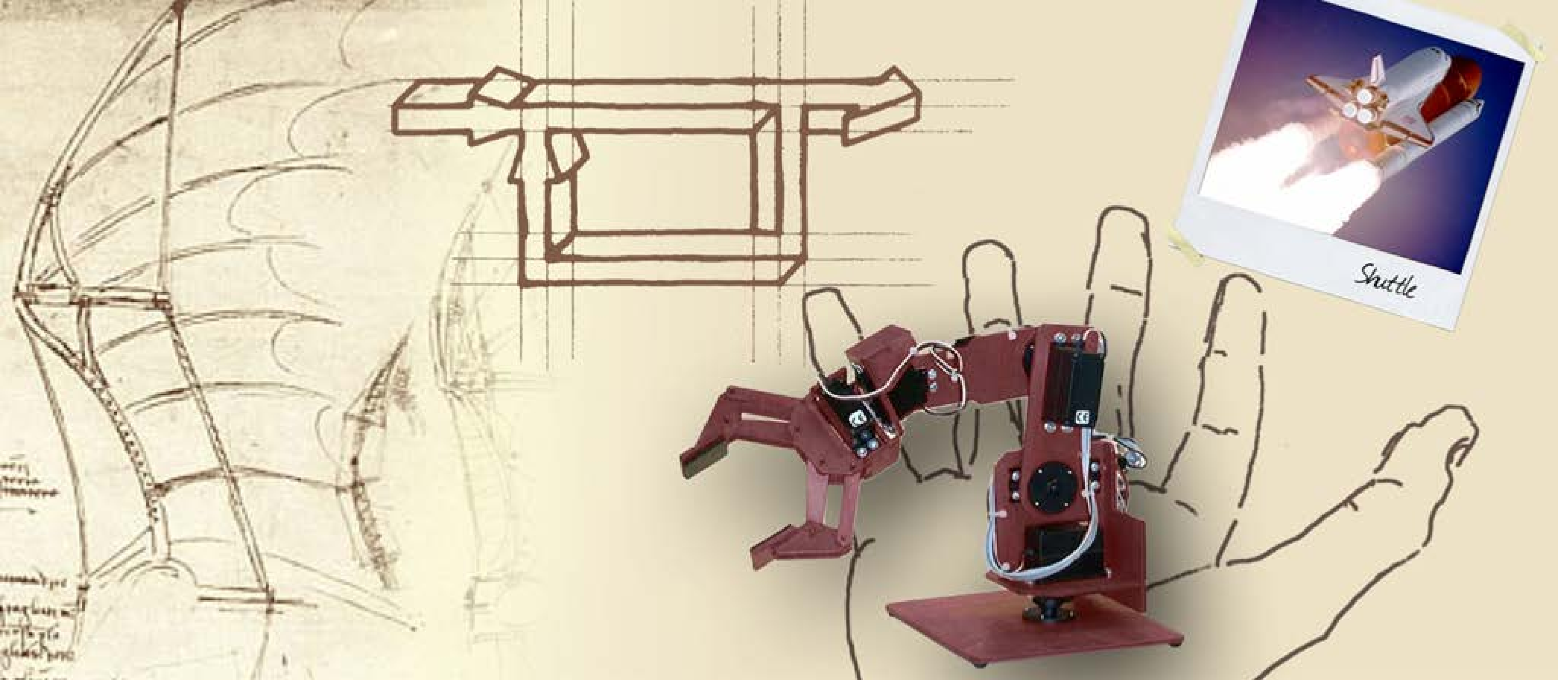
- Si valuti l'effetto in regime permanente per:
  - $d_u(t) = \alpha_{du} t = 0.05t$, $d_y(t) = 0$



$$y_{du,\infty} = \infty$$

$$y_{dy,\infty} = 0$$

$$y_{d,\infty} = \infty$$



Reiezione di disturbi in regime permanente

Implicazioni sul progetto del controllore

Specifiche relative a disturbi polinomiali

- Le **specifiche sull'attenuazione o reiezione** in regime permanente **di disturbi polinomiali** possono imporre vincoli
  - Sul **numero di poli in $s = 0$** che il controllore deve presentare
  - Sul **guadagno stazionario minimo** del controllore

Specifica di reiezione totale

- Una specifica di **reiezione totale in regime permanente** di un disturbo polinomiale può determinare un **vincolo sul numero di poli in s = 0** del controllore, ma non sul suo guadagno
- Per reiettare completamente in regime permanente un disturbo polinomiale di **grado h** è necessario che la fdt $G_1(s)$ risultante dalla cascata dei blocchi **a monte** del punto di ingresso **del disturbo** abbia (almeno) **h+1 poli in s = 0**

$G_1(s)$ coincide con l'intera $G_a(s)$ se il disturbo entra sull'uscita del sistema

Specifica di reiezione totale

- Una specifica di **reiezione totale in regime permanente** di un disturbo polinomiale può determinare un **vincolo sul numero di poli in s = 0** del controllore, ma non sul suo guadagno
- Per reiettare completamente in regime permanente un disturbo polinomiale di **grado h** è necessario che la fdt $G_1(s)$ risultante dalla cascata dei blocchi **a monte** del punto di ingresso **del disturbo** abbia (almeno) **h+1 poli in s = 0**
- Il controllore dovrà presentare i poli nell'origine necessari per soddisfare tale condizione

Specifica di attenuazione (1/4)

- Una specifica sull'**attenuazione minima** di un disturbo polinomiale, che deve essere garantita in regime permanente, può essere formulata in termini di **effetto massimo del disturbo sull'uscita** o equivalentemente **sull'errore massimo generato**
- Una specifica di questo tipo può determinare **vincoli** sia **sul numero di poli in s = 0** del controllore sia **sul** suo **guadagno stazionario**

Specifica di attenuazione (2/4)

- L'**effetto in regime permanente** di un disturbo polinomiale di **grado h** è **finito**, **non nullo** se la fdt $G_1(s)$ risultante **a monte** del punto di ingresso **del disturbo** ha **h poli in s = 0**
  - Un **disturbo costante** ha **sempre effetto limitato** sull'uscita in regime permanente
    $\Rightarrow$ Una specifica sull'attenuazione di un disturbo costante non richiede **mai l'inserimento di poli in s = 0 nel controllore**

Specifica di attenuazione (3 / 4)

- Un **disturbo a rampa** ha **effetto limitato** sull'uscita in regime permanente **solo se** nella fdt $G_1(s)$ risultante **a monte** del suo punto di ingresso vi è **un polo in s = 0** $\Rightarrow$ Se necessario, tale condizione dovrà essere garantita dall'introduzione di un polo in $s = 0$ nel controllore

- Se le caratteristiche proprie del sistema o altre specifiche portano $G_1(s)$ ad avere (almeno) $h + 1$ poli in $s = 0$, l'effetto del disturbo sull'uscita si annulla in regime permanente $\Rightarrow$ Non si hanno in tale caso vincoli sul guadagno del controllore

Specifica di attenuazione (4/4)

- Quando la fdt $G_1(s)$ risultante **a monte** del punto di ingresso di un **disturbo di grado h** ha proprio **h poli in s = 0**, si ha la nascita di un **vincolo sul guadagno minimo del controllore**
- Poiché in tal caso l'effetto del disturbo in regime permanente è dato da una funzione decrescente del guadagno stazionario K_{G1} di $G_1(s)$, si ha la nascita di un vincolo della seguente forma:

$$\boxed{\left|y_{d,\infty}(K_{G1})\right| \leq y_{d,max} \Rightarrow \left|K_{G1}\right| \geq K_{G1,min} \Rightarrow \left|K_C\right| \geq K_{C,min}}$$