01AYS / 07AYS - FONDAMENTI DI AUTOMATICA

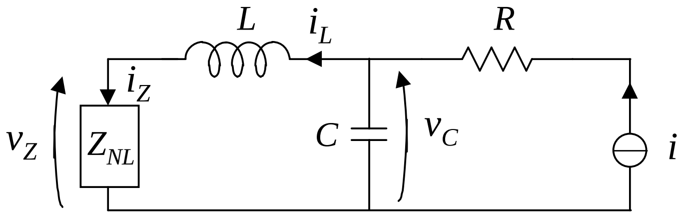
Tipologia degli esercizi proposti nel compito del 2/II/2004

Esercizio 1 - Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + 3u_1(t)\\ \dot{x}_2(t) &= 0.5x_1(t) + u_2(t)\\ y(t) &= 2x_1(t)\cdot u_1(t)\end{aligned}$$

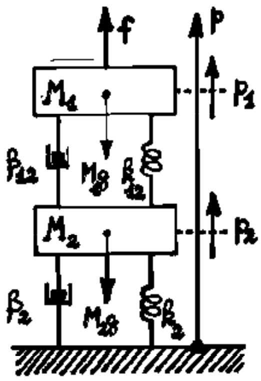
analizzare le proprietà del modello matematico, precisando se il sistema è a tempo continuo o discreto, statico o dinamico, a dimensione finita o infinita, SISO o MIMO, lineare o non lineare, tempo-variante o tempo-invariante.
Soluzione: Il sistema è a tempo continuo, dinamico, a dimensione finita (pari a 2), MIMO (con 2 ingressi), non lineare, tempo-invariante.

Esercizio 2 - Si consideri il sistema dinamico elettrico riportato in figura, in cui compare un componente Z_{NL} avente caratteristica statica non lineare: $v_Z(t) = \alpha\, i_Z(t) + \beta\, i_Z^3(t)$.



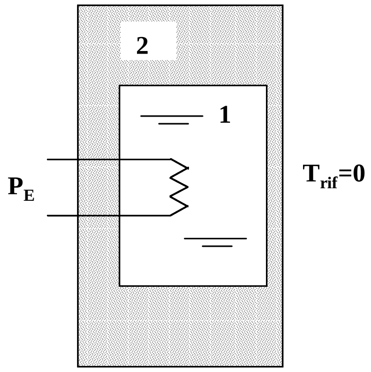
Scrivere le equazioni di stato del sistema, scegliendo come variabile di stato $x = [i_L,\ v_C]^T$ e come variabile di ingresso $u = i$.
Soluzione: $\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{L}\left[\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_1^3(t)\right] + \frac{1}{L}x_2(t)$, $\quad \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{C}x_1(t) + \frac{1}{C}u$

Esercizio 3 - Si consideri il sistema dinamico meccanico riportato in figura, costituito da due masse puntiformi M_1 ed M_2 che si muovono in senso verticale e le cui posizioni sono rispettivamente p_1 e p_2. Le masse M_1 ed M_2 sono soggette alla rispettive forze peso $M_1 g$ ed $M_2 g$; alla massa M_1 è inoltre applicata una forza verticale esterna f.



Determinare le equazioni del moto delle due masse, assumendo i seguenti valori numerici dei parametri: $M_1 = 2\,\mathrm{kg}$, $M_2 = 5\,\mathrm{kg}$, $k_2 = 30\,\mathrm{N/m}$, $k_{12} = 10\,\mathrm{N/m}$, $\beta_2 = 20\,\mathrm{Ns/m}$, $\beta_{12} = 10\,\mathrm{Ns/m}$, $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.
Soluzione: $\ddot{p}_1 + 5\dot{p}_1 + 5p_1 = 5\dot{p}_2 + 5p_2 + 0.5f - 9.81$, $\ddot{p}_2 + 6\dot{p}_2 + 8p_2 = 2\dot{p}_1 + 2p_1 - 9.81$

Esercizio 4 - Un sistema termico è costituito da due corpi omogenei **1** e **2**; all'interno del corpo **1** è applicato un flusso di calore P_E; l'ambiente esterno è a temperatura costante $T_{rif} = 0$. Gli stati del sistema sono dati dalle temperature T_1 e T_2 dei due corpi omogenei, l'ingresso è costituito dal flusso P_E, mentre l'uscita è data dalla temperatura T_2. Determinare le matrici A, B e C del modello LTI che descrive il sistema, assumendo che le capacità dei due corpi siano date da $C_1 = C_2 = 2C_0$ e le conduttanze termiche fra i due corpi e fra il corpo **2** e l'ambiente esterno siano $K_{12} = K_{20} = 1/(0.5R)$, ove $0.5R$ è la resistenza termica fra i vari elementi.



Soluzione: $A = \dfrac{1}{RC_0}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \dfrac{1}{C_0}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

Esercizio 5 - Si consideri il seguente sistema LTI tempo continuo completamente raggiungibile ed osservabile a due ingressi (u_1, u_2) e due uscite, (y_1, y_2):

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -3.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1.2 & 1.2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra il primo ingresso u_1 e la prima uscita y_1

Soluzione: $G(s) = \dfrac{2(s+1.2)}{(s+1.5)(s+2)}$.

Esercizio 6 - Dato il sistema dinamico a tempo discreto caratterizzato dalle seguenti equazioni di stato:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -x_1(k) + 4x_2(k) + 17u(k) \\ x_2(k+1) &= 2x_1(k) + x_2(k) + 7u(k) \\ y(k) &= x_1(k) + x_2(k) + 5u(k) \end{aligned}$$

determinare l'espressione analitica dell'uscita $y(k)$ supponendo condizioni iniziali non nulle, $x(0) = [3 \;\; -1]^T$, ed ingresso nullo, $u(k) = 0, \ \forall k$.

Soluzione: $y(k) = \left[0.67 \cdot (3)^k + 1.33 \cdot (-3)^k\right] \varepsilon(k)$

Esercizio 7 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{5(s+9)(s-2)}{(3s^2+2s+0.6)(5s^2+5s+2.5)}$$

calcolare, se possibile, il valore finale y_∞ della risposta all'ingresso a gradino di ampiezza 0.1, $u(t) = 0.1\varepsilon(t)$.

Soluzione: $y_\infty = -6$

Esercizio 8 - Dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 \\ 1 & p & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

determinare per quali valori del parametro reale p il sistema è (internamente) asintoticamente stabile.

Soluzione: Il sistema è asintoticamente stabile per $-1 < p < -0.75$.

Esercizio 9 - Un sistema dinamico non lineare, a tempo continuo, con nonlinearità derivabili, viene linearizzato nell'intorno del suo unico punto di equilibrio, ottenendo un sistema LTI descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Analizzare le proprietà di stabilità del punto di equilibrio.

Soluzione: Il punto di equilibrio del sistema non lineare è asintoticamente stabile.

Esercizio 10 - Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 2p-2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ p \end{bmatrix}$$

di un modello LTI in variabili di stato a tempo continuo, determinare per quali valori del parametro reale p è possibile realizzare una legge di controllo per retroazione dagli stati che permetta di posizionare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema
Soluzione: È possibile per tutti i valori di p ad eccezione dei valori $p = 2.4142$ e $p = -0.4142$.

Esercizio 11 - Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.001 \\ 1 & 0 & -0.03 \\ 0 & 1 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

di un modello LTI in variabili di stato a tempo continuo, determinare, se possibile, i coefficienti L dello stimatore asintotico che permettono di posizionare gli autovalori del sistema osservato in $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = -4$.
Soluzione: $L' = [23.999\ 25.970\ 8.700]$

Esercizio 12 - Siano x il vettore di stato, u l'ingresso ed y l'uscita di un modello LTI, SISO, a tempo discreto, internamente instabile, completamente osservabile ma non completamente raggiungibile.
È possibile realizzare una legge di controllo della forma $u(k) = -Kx(k) + \alpha r(k)$ tale da posizionare arbitrariamente tutti gli autovalori del sistema retroazionato?
È possibile realizzare uno stimatore asintotico dello stato che posizioni arbitrariamente tutti gli autovalori del sistema osservato?
È possibile realizzare una legge di controllo della forma $u(k) = -K\hat{x}(k) + \alpha r(k)$ tale da posizionare arbitrariamente tutti gli autovalori del sistema retroazionato, essendo $\hat{x}(k)$ la stima dello stato fornita da uno stimatore asintotico?
Soluzione: È possibile realizzare solo uno stimatore asintotico dello stato che posizioni arbitrariamente tutti gli autovalori del sistema osservato.

Esercizio 13 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{3(s+5)(s-3)}{(s^2+3s+2)(s^2+7s+12)}$$

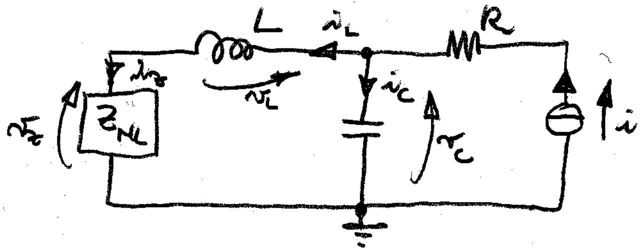
determinare l'insieme T delle costanti di tempo che lo caratterizzano.
Soluzione: $T = \{1,\ 0.5,\ 0.33,\ 0.25\}$

Es. #1

$$\dot x_1(t) = x_2(t) + 3u_1(t)$$
$$\dot x_2(t) = 0.5\, x_1(t) + u_2(t)$$
$$y(t) = \underline{2x_1(t)\, u_1(t)}$$

sistema a tempo continuo / ~~discreto~~,
~~statico~~ / dinamico,
a dimensione finita / ~~infinita~~ $(n = 2 < \infty)$
~~SISO~~ / MIMO (2 ingressi)
~~lineare~~ / non lineare
~~tempo-variante~~ / tempo-invariante

Es. #2



$$v_Z(t) = \alpha\, i_Z(t) + \beta\, i_Z^3(t) \quad ⑤ ✓$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$u(t) = [i(t)]$$

Eq. costitutive: $v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$ ① ✓

$i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$ ② ✓

Eq. nodo: $\sum i_{in} = \sum i_{out} \Rightarrow i = i_L + i_C$ ③ ✓

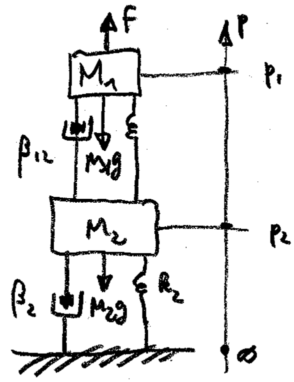
Eq. maglia: $v_L + v_Z = v_C$ ④ ✓

Equaz. di stato

$$\boxed{\dot x_1 = \frac{di_L}{dt} \overset{①}{=} \frac{1}{L}v_L \overset{④}{=} \frac{1}{L}(v_C - v_Z) \overset{⑤}{=} \frac{1}{L}x_2 - \frac{1}{L}(\alpha i_Z + \beta i_Z^3) = -\frac{1}{L}(\alpha x_1 + \beta x_1^3) + \frac{1}{L}x_2} = f_1(x,u)$$

$$\boxed{\dot x_2 = \frac{dv_C}{dt} \overset{②}{=} \frac{1}{C}i_C \overset{③}{=} \frac{1}{C}(-i_L + i) = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}u} = f_2(x,u)$$

Es. #3



$M_1 = 2\,kg$, $M_2 = 5\,kg$,
$k_2 = 30\,N/m$, $k_{12} = 10\,N/m$,
$\beta_2 = 20\,Ns/m$, $\beta_{12} = 10\,Ns/m$
$g = 9.81\,m/s^2$

Eq. moto: $M_i \ddot p_i = \sum_k f_k^{ext} - \sum_l f_l^{int}$

$$M_1 \ddot p_1 = +f - M_1 g - [\beta_{12}(\dot p_1 - \dot p_2) + k_{12}(p_1 - p_2)] \Rightarrow$$

$$\ddot p_1 + \frac{\beta_{12}}{M_1}\dot p_1 + \frac{k_{12}}{M_1}p_1 = \frac{\beta_{12}}{M_1}\dot p_2 + \frac{k_{12}}{M_1}p_2 + \frac{f}{M_1} - g \Rightarrow$$

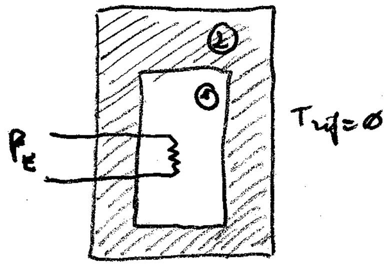
$$\boxed{\ddot p_1 + 5\dot p_1 + 5p_1 = 5\dot p_2 + 5p_2 + 0.5f - 9.81}$$

$$M_2 \ddot p_2 = -M_2 g - [\beta_{12}(\dot p_2 - \dot p_1) + k_{12}(p_2 - p_1) + \beta_2 \dot p_2 - k_2 p_2] \Rightarrow$$

$$\ddot p_2 + \frac{\beta_{12}+\beta_2}{M_2}\dot p_2 + \frac{k_{12}+k_2}{M_2}p_2 = \frac{\beta_{12}}{M_2}\dot p_1 + \frac{k_{12}}{M_2}p_1 - g \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot p_2 + 6\dot p_2 + 8p_2 = 2\dot p_1 + 2p_1 - 9.81}$$

$\boxed{\text{Es. \#4}}$



$C_1 = C_2 = 2C_0$

$K_{12} = K_{20} = \dfrac{1}{0.5R} = 2/R$

Matrici A, B, C del sistema?

$$x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \theta_i \text{ dei corpi omogenei } \underline{\text{non}} \text{ termostatati}$$

$$u = \begin{bmatrix} P_E \\ \cancel{T_{rif}=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_E \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} \theta_2 \end{bmatrix} = x_2$$

Equazioni di equilibrio termico: $C_i \dot{\theta}_i = \sum_k P_k^{est} - \sum_l P_l^{int}$

$$C_1 \dot{\theta}_1 = +P_E - K_{12}(\theta_1 - \theta_2) \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 = -\frac{K_{12}}{C_1} x_1 + \frac{K_{12}}{C_1} x_2 + \frac{1}{C_1} u = f_1(x,u)$$

$$C_2 \dot{\theta}_2 = -K_{12}(\theta_2 - \theta_1) - K_{20}(\theta_2 - \underbrace{T_{rif}}_{=0}) \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\theta}_2 = \frac{K_{12}}{C_2} x_1 - \frac{K_{12}+K_{20}}{C_2} x_2 = f_2(x,u)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow \boxed{A} = \begin{bmatrix} -\frac{K_{12}}{C_1} & \frac{K_{12}}{C_1} \\ \frac{K_{12}}{C_2} & -\frac{K_{12}+K_{20}}{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{2RC_0} & \frac{2}{2RC_0} \\ \frac{2}{2RC_0} & -\frac{4}{2RC_0} \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{RC_0} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{B} = \begin{bmatrix} 1/C_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{2C_0} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$y = Cx + Du = x_2 \Rightarrow \boxed{C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{\text{Es. \#5}}$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad B = \left[\begin{array}{c|c} -1.2 & 1.2 \\ -1 & 1 \end{array}\right] = \left[B_1 \,|\, B_2 \right]$$

$$C = \left[\begin{array}{cc} 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} C_1 \\ \hline C_2 \end{array}\right]$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)}} = C_1 (sI - A)^{-1} B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & +3 \\ -1 & s+3.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s+3.5)+3} \begin{bmatrix} s+3.5 & -3 \\ +1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2+3.5s+3} \begin{bmatrix} -2 & -2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2s+2.4}{(s+1.5)(s+2)} = \boxed{\frac{2(s+1.2)}{(s+1.5)(s+2)}}$$

$\boxed{\text{Es. \#6}}$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1(k) + 4x_2(k) + 17u(k) \\ x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) + 7u(k) \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + 5u(k) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(k=0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \\ u(k) = 0, \ \forall k \end{cases} \Rightarrow y(k) = ?$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 17 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$Y(z) = Cz(zI-A)^{-1}x_0 + \left[C(zI-A)^{-1}B + D\right]\underbrace{U(z)}_{=0} = Cz(zI-A)^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} z \begin{bmatrix} z+1 & -4 \\ -2 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= z \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(z+1)(z-1)-8} \begin{bmatrix} z-1 & 4 \\ 2 & z+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{z}{z^2-9} \begin{bmatrix} z+1 & z+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{z(3z+3-z-5)}{(z+3)(z-3)} =$$

$$= \frac{z(2z-2)}{(z+3)(z-3)} = z\left[\frac{8/6}{z+3} + \frac{4/6}{z-3}\right] = \frac{4}{3}\frac{z}{z+3} + \frac{2}{3}\frac{z}{z-3} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \boxed{y(k) = \left[\frac{4}{3}(-3)^k + \frac{2}{3}3^k\right]\varepsilon(k)}$$

Es. #7

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5(s+9)(s-2)}{(3s^2+2s+0.6)(5s^2+5s+2.5)} \qquad ?\ y_\infty\Big|_{u(t)=0.1\,\epsilon(t)}$$

Esiste il regime permanente ad un ingresso costante solo se il sistema è BIBO-stabile, cioè se i poli di $G(s)$ hanno $Re<0$ $\Rightarrow$ poiché Den $G(s)$ è il prodotto di 2 polinomi di II grado, a coeff. >0, completi $\Rightarrow$ dalla regola di Cartesio, tutte le radici hanno $Re<0$ $\Rightarrow$ è BIBO-stabile.

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\cdot\frac{0.1}{s}$$

$$\boxed{y_\infty} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\, G(s)\cdot\frac{0.1}{\cancel{s}} = 0.1\cdot G(s=0) = \frac{0.1\cdot 9\cdot(-2)\cdot 5}{0.6\cdot 2.5} = \frac{-9.0}{1.5} = \boxed{-6}$$

Es. #8

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 \\ 1 & p & -2 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad D = [0]$$

Asintotica Stabilità (interna) di un sistema $\underline{\text{LTI - T.D.}}$ $\Leftrightarrow |\lambda_i(A)| < 1$

A è triangolare a blocchi. $A = \left[\begin{array}{c|cc} 0.4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 2 \\ 1 & p & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \lambda_i(A) = \left\{\underbrace{0.4}_{|\cdot|<1},\ \lambda_i\left(\begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ p & -2 \end{bmatrix}\right)\right\} \Rightarrow$

$$p.c.(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-0.5 & -2 \\ -p & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-0.5)(\lambda+2) - 2p = \lambda^2 + 1.5\lambda - 1 - 2p$$ $\Rightarrow$ per quali p, $|\text{radici}|<1$?

Dal Criterio di Jury, essendo $p(\lambda)$ di II grado, la condizione necessaria e sufficiente è:

- $p.c.(\lambda=1) > 0 \Leftrightarrow \cancel{1}+1.5\cancel{-1}-2p > 0 \Leftrightarrow 2p < 1.5 \Leftrightarrow p < 0.75$
- $(-1)^2 p.c.(\lambda=-1) > 0 \Leftrightarrow \cancel{1}-1.5\cancel{-1}-2p > 0 \Leftrightarrow 2p < -1.5 \Leftrightarrow \underline{p < -0.75}$
- $|a_n = a_2| > |a_0| \Leftrightarrow |1| = 1 > |-1-2p| \Leftrightarrow -1 < -1-2p < +1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < -1-2p \\ -1-2p < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p < 0 \\ p > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{-1 < p < 0}$$

e quindi occorre che: $\boxed{-1 < p < -0.75}$

Es. #9

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -10 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{array}\right]$$

Stabilità dell'equilibrio del punto di equilibrio di un sistema $\underline{\text{NON lineare - T.C.}}$ $\Leftrightarrow Re\,\lambda_i(A) = ?$

$$\lambda_i(A) \overset{\text{triangolare a blocchi}}{=} \left\{\lambda_i\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}\right),\ \lambda_i\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -20 \end{bmatrix}\right)\right\} \Rightarrow$$

- $p.c.(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ +3 & \lambda+10 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+10)+3 = \lambda^2+10\lambda+3$ $\Rightarrow$ per la regola di Cartesio, 2 radici a $Re<0$
- $p.c.(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ +4 & \lambda+20 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+20)+4 = \lambda^2+20\lambda+4$ $\Rightarrow$ " " " " " , 2 radici a $Re<0$

$\Rightarrow Re\,\lambda_i(A) < 0,\ \forall i \Rightarrow$ punto di equilibrio $\underline{\text{asintoticamente stabile}}$.

Es. #10

$$A = \begin{bmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 2p-2 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ p \end{bmatrix}$$

Per quali p, la legge di controllo per retroazione degli stati permette di posizionare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema controllato?

Occorre che il sistema sia completamente raggiungibile, cioè che $\rho(R = [B|AB]) = n = 2$.

$$R = [B\,|\,AB] = \left[\begin{array}{c|c} -1 & -p \\ p & 2p^2-2p-1 \end{array}\right] = R(p)$$ ha 2 colonne linearmente indipendenti (cioè $\rho(R)=2$)

se e solo se: $2p^2-2p-1 \neq p^2$, cioè se $p^2-2p-1 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{p \neq \begin{cases} 1+\sqrt{2} = 2.4142 \\ 1-\sqrt{2} = -0.4142 \end{cases}}$

ES. #11

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -0.001\\ 1 & 0 & -0.03\\ 0 & 1 & -0.3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix};\quad \exists L : \lambda_i(A-LC)=\begin{cases}-2\\-3\\-4\end{cases} ?$$

$$O=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -0.3\\ 1 & -0.3 & 0.06\end{bmatrix}_{CA\cdot A}$$ ha 3 righe l.i. $\Rightarrow \rho(O)=3=n \Rightarrow$

il sistema è completamente osservabile $\Rightarrow \exists L$ tale da posizionare ad arbitrio $\lambda_i(A-LC)$.

$p.c.(\lambda)=\det(\lambda I-(A-LC))=|\lambda I-A+LC|$, con $L=\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\l_3\end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix}\lambda-0 & -0 & +0.001+l_1\\ -1 & \lambda-0 & +0.03+l_2\\ 0 & -1 & \lambda+0.3+l_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0.001+l_1\\ -1 & \lambda & 0.03+l_2\\ 0 & -1 & \lambda+0.3+l_3\end{vmatrix}=\lambda\left[\lambda(\lambda+0.3+l_3)+1\cdot(0.03+l_2)\right]-(-1)(0.001+l_1)$$

$$=\lambda\left[\lambda^2+\lambda(0.3+l_3)+0.03+l_2\right]+0.001+l_1=\lambda^3+\lambda^2\underline{(0.3+l_3)}+\lambda\underline{(0.03+l_2)}+\underline{0.001+l_1}=$$

$$p.c.(\lambda)\Big|_{desiderato}=\prod_{i=1}^{3}(\lambda-\lambda_{i,desiderati})=[\lambda-(-2)][\lambda-(-3)][\lambda-(-4)]=(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)=$$

$$=(\lambda^2+5\lambda+6)(\lambda+4)=\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda+4\lambda^2+20\lambda+24=\lambda^3+\underline{9}\lambda^2+\underline{26}\lambda+\underline{24}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}0.001+l_1=24\\ 0.03+l_2=26\\ 0.3+l_3=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l_1=24-0.001=23.999\\ l_2=26-0.03=25.97\\ l_3=9-0.3=8.7\end{cases}\Rightarrow \boxed{L=\begin{bmatrix}23.999\\25.97\\8.7\end{bmatrix}}$$

ES. #12

Sistema LTI, SISO, T.D., instabile internamente, <u>non</u> completamente raggiungibile, completamente osservabile

1) La legge di controllo $u(k)=-Kx(k)+\alpha r(k)$ [retroazione dagli stati] permette di posizionare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema controllato solo se
   a) <u>tutte</u> le variabili di stato sono accessibili (per cui si retroaziona x)
   b) il sistema è <u>completamente raggiungibile</u> $\Rightarrow$ <u>NON</u> è possibile in questo caso
2) Uno stimatore asintotico dello stato posiziona <u>arbitrariamente</u> tutti gli autovalori del sistema osservato solo se il sistema è <u>completamente osservabile</u> $\Rightarrow$ <u>OK</u> in questo caso
3) La legge di controllo $u(k)=-K\hat{x}(k)+\alpha r(k)$ [retroazione dagli stati stimati o retroazione mediante regolatore] permette di posizionare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema controllato solo se il sistema è <u>completamente raggiungibile & completamente osservabile</u> $\Rightarrow$ <u>NON</u> è possibile in questo caso

ES. #13

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3(s+5)(s-3)}{(s^2+3s+2)(s^2+7s+12)}$$ Trovare $T=\{$costanti di tempo$\}$

$$T=\left\{T_i=-\frac{1}{Re(p_i)} : T_i>0,\ p_i=\text{poli di } G(s)\right\}\Rightarrow$$

$$G(s)=\frac{3(s+5)(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}\Rightarrow p_i=\begin{cases}-1\\-2\\-3\\-4\end{cases}\Rightarrow T_i=\begin{cases}1>0\\1/2>0\\1/3>0\\1/4>0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\boxed{T=\{1,\ 0.5,\ 0.\overline{3},\ 0.25\}}$$