

CONTROLLI AUTOMATICI

Cenni di tecniche di discretizzazione
del controllore

Introduzione

- Una volta progettato il controllore in cascata o il regolatore occorre realizzarlo fisicamente.
- Si pone il problema dell'implementazione di un **algoritmo numerico** su processore.
- Per poter realizzare l'algoritmo occorre trasformare la fdt del controllore da tempo continuo a tempo discreto:
 - **discretizzazione** del controllore.

Trasformata Z

- Data una sequenza di campioni $f(k)$ $k=0,1,2,\dots$ la **trasformata Z** è definita come

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k} \quad z = e^{sT_s}$$

- Proprietà:
 - linearità
 - ritardo $Z[f(k-n)] = z^{-n} F(z)$
- La trasformata ci serve per definire un controllore $C(z)$ ottenuto per discretizzazione di $C(s)$
- $C(z)$ lega la sequenza $e(k)$ alla sequenza $u(k)$ così come $C(s)$ lega $e(t)$ ad $u(t)$, infatti:

Trasformata Z

$$C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$\begin{aligned} (z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)U(z) &= \\ &= (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m)E(z) \end{aligned}$$

Trasformata Z

$$z^n (1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) U(z) =$$

$$= z^m (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) E(z)$$

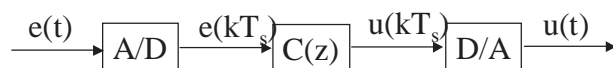
$$u(kT_s) = -a_1 u[(k-1)T_s] - \dots - a_n u[(k-n)T_s] +$$

$$+ \left\{ b_0 e[(k-n+m)T_s] + b_1 e[(k-1-n+m)T_s] + \dots + b_m e[(k-n)T_s] \right\}$$

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L11 - 5

Struttura del controllo



- Il convertitore **A/D** è un campionatore con passo di campionamento T_s e la sua fdt è sostanzialmente pari ad $1/T_s$.
- Il convertitore **D/A** è un ricostruttore o filtro di tenuta, tipicamente del primo ordine (ZOH), e la sua fdt $H_0(s)$ è pari a $(1 - e^{-sT_s})/s \approx T_s/(1 + sT_s/2)$.
Questa fdt introduce un ritardo di fase nella funzione di anello che può compromettere la stabilità → bisogna tenerne conto nel progetto.

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L11 - 6

Discretizzazione

- Scelta di T_s
- Teorema del campionamento: $\omega_s > 2\omega_{\max}$
 - qual è ω_{\max} ? $\omega_{\max} \approx \omega_b$
- Quindi $\omega_s > 2\omega_b = 4\omega_c$ ($\omega_b \approx 2\omega_c$)
- Scegliamo un limite superiore pari a 10 volte:

$$4\omega_c < \omega_s < 40\omega_c$$
- Con $\omega_s \approx 4\omega_c$ si ha una perdita di fase dovuta al filtro di tenuta eccessiva, conviene aumentare il limite inferiore:

$$20\omega_c < \omega_s < 40\omega_c$$
- Dato che $\omega_s = 2\pi/T_s$ si ottiene

$$0.15/\omega_c < T_s < 0.3/\omega_c$$

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L11 - 7

Discretizzazione

- Per **discretizzare** $C(s)$ esistono diverse metodologie basate su
 - tecniche numeriche di integrazione:
 - trasformazione bilineare (`tustin`)
 - $C_{\text{Tustin}}(z) = C(s)$ con $s = (2/T_s)(z-1)/(z+1)$
 - invarianza della risposta al gradino (`zoh`)
 - $C_{\text{zoh}}(z) = Z\{H_0(s) C(s)\}$
 - corrispondenza zeri poli (`matched`):
 - applica la relazione $z = e^{sT_s}$ ai poli ed agli zeri di $C(s)$
- In **Matlab** `Cz = c2d(Cs, Ts, 'metodo')`

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L11 - 8