CONTROLLI AUTOMATICI

Cenni di tecniche di discretizzazione

del controllore

Introduzione

- Una volta progettato il controllore in cascata o il regolatore occorre realizzarlo fisicamente.
- Si pone il problema dell'implementazione di un algoritmo numerico su processore.
- Per poter realizzare l'algoritmo occorre trasformare la fdt del controllore da tempo continuo a tempo discreto:
  - discretizzazione del controllore.

Trasformata Z

- Data una sequenza di campioni f(k) k=0,1,2,... la trasformata Z è definita come

$$F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k} \qquad z=e^{sT_s}$$

- Proprietà:
  - linearità
  - ritardo Z[f(k–n)]=z^{-n} F(z)
- La trasformata ci serve per definire un controllore C(z) ottenuto per discretizzazione di C(s)
- C(z) lega la sequenza e(k) alla sequenza u(k) così come C(s) lega e(t) ad u(t), infatti:

Trasformata Z

$$C(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{b_0 z^m+b_1 z^{m-1}+\cdots+b_m}{z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n}$$

$$\left(z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n\right)U(z)=$$

$$=\left(b_0 z^m+b_1 z^{m-1}+\cdots+b_m\right)E(z)$$

Trasformata Z

$$z^n\left(1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}\right)U(z)=$$

$$=z^m\left(b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}\right)E(z)$$

$$u\left(kT_s\right)=-a_1u\left[(k-1)T_s\right]-\cdots-a_nu\left[(k-n)T_s\right]+$$

$$+\left\{b_0e\left[(k-n+m)T_s\right]+b_1e\left[(k-1-n+m)T_s\right]+\cdots+b_me\left[(k-n)T_s\right]\right\}$$

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale L11 - 5

Struttura del controllo

$$\xrightarrow{e(t)}\boxed{\text{A/D}}\xrightarrow{e(kT_s)}\boxed{\text{C(z)}}\xrightarrow{u(kT_s)}\boxed{\text{D/A}}\xrightarrow{u(t)}$$

- Il convertitore A/D è un campionatore con passo di campionamento T_s e la sua fdt è sostanzialmente pari ad $1/T_s$.
- Il convertitore D/A è un ricostruttore o filtro di tenuta, tipicamente del primo ordine (ZOH), e la sua fdt $H_0(s)$ è pari a $(1–e^{-sT_s})/s \approx T_s/(1+sT_s/2)$.
  Questa fdt introduce un ritardo di fase nella funzione di anello che può compromettere la stabilità → bisogna tenerne conto nel progetto.

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale L11 - 6

Discretizzazione

- Scelta di T_s
- Teorema del campionamento: $\omega_s > 2\omega_{max}$
  - qual è ω_{max}? $\omega_{max} \approx \omega_b$
- Quindi $\omega_s > 2\omega_b = 4\omega_c$ ($\omega_b \approx 2\omega_c$)
- Scegliamo un limite superiore pari a 10 volte:

$$4\omega_c < \omega_s < 40\omega_c$$

- Con $\omega_s \approx 4\omega_c$ si ha una perdita di fase dovuta al filtro di tenuta eccessiva, conviene aumentare il limite inferiore:

$$20\omega_c < \omega_s < 40\omega_c$$

- Dato che $\omega_s = 2\pi/T_s$ si ottiene

$$0.15/\omega_c < T_s < 0.3/\omega_c$$

Discretizzazione

- Per discretizzare C(s) esistono diverse metodologie basate su
  - tecniche numeriche di integrazione:
    trasformazione bilineare (`tustin`)
    $C_{Tustin}(z)=C(s)$ con $s=(2/T_s)(z-1)/(z+1)$
  - invarianza della risposta al gradino (`zoh`)
    $C_{zoh}(z)=Z\{H_0(s)\, C(s)\}$
  - corrispondenza zeri poli (`matched`):
    applica la relazione $z=e^{sTs}$ ai poli ed agli zeri di C(s)
- In Matlab `Cz=c2d(Cs,TS,'metodo')`