Controlli Automatici (AUT) - 09AKSBL

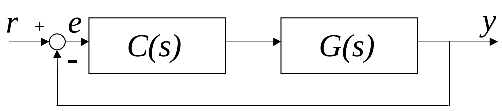
Analisi della precisione in regime permanente

- Disturbi e riferimenti polinomiali

Progetto in regime permanente

Analisi della precisione in regime permanente: riferimenti polinomiali

- Data la struttura di controllo:



- Si definisce *errore stazionario di inseguimento* la quantità:

$$\left|e_r^\infty\right| = \lim_{t\to\infty}\left|e(t)\right| = \lim_{t\to\infty}\left|r(t)-y(t)\right|$$

- consideriamo le sue proprietà quando il riferimento è polinomiale di ordine h ed ampiezza ρ:

$$r(t) = \rho\frac{t^h}{h!} \qquad R(s) = \frac{\rho}{s^{h+1}}$$

Analisi della precisione in regime permanente: riferimenti polinomiali

- Per sviluppare i calcoli, consideriamo la funzione di trasferimento di anello $L(s)$ in forma fattorizzata di Bode mettendo in evidenza gli eventuali g poli nell'origine ed il corrispondente guadagno statico generalizzato di ordine g K_g

$$L(s) = K_g \frac{\overbrace{\prod_i \left(1+\frac{s}{z_i}\right) \prod_i \left(1+\frac{2\zeta_i}{\omega_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,i}^2}\right)}^{N_L^{'}(s)}}{s^g \underbrace{\prod_j \left(1+\frac{s}{p_j}\right) \prod_j \left(1+\frac{2\zeta_j}{\omega_{n,j}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,j}^2}\right)}_{D_L^{'}(s)}} = K_g \frac{N_L^{'}(s)}{s^g D_L^{'}(s)},$$

$$\rightarrow \begin{cases} K_g = \lim_{s\to 0} s^g L(s) \quad \text{guadagno statico generalizzato di ordine g} \\ \lim_{s\to 0} N_L^{'}(s) = \lim_{s\to 0} D_L^{'}(s) = 1 \end{cases}$$

Analisi della precisione in regime permanente: riferimenti polinomiali

- Per valutare il comportamento in regime permanente dell'errore di inseguimento si utilizza il teorema del valore finale:

$$\lim_{t\to\infty} |e(t)| = \lim_{s\to 0} s|E(s)| = \lim_{s\to 0} s|S(s)R(s)| = \lim_{s\to 0} s\left|\frac{1}{1+L(s)} \frac{\rho}{s^{h+1}}\right| =$$

$$= \lim_{s\to 0} \left|\frac{1}{1+K_g N_L^{'}(s)/s^g D_L^{'}(s)} \frac{\rho}{s^h}\right| = \lim_{s\to 0} \left|\frac{s^g D_L^{'}(s)}{s^g D_L^{'}(s) + K_g N_L^{'}(s)} \frac{\rho}{s^h}\right|$$

- Il calcolo indicato è fattibile solo se sono verificate le ipotesi del teorema → questo avviene solo se $g \geq h$
- Se $g < h$ il teorema non è applicabile e bisogna procedere a calcolare il limite $\lim_{t\to\infty}|e(t)|$ in modo diretto. In tal caso risulta che $\lim_{t\to\infty}|e(t)| = \infty$

Analisi della precisione in regime permanente: riferimenti polinomiali

- Quindi: $$\left|e_r^\infty\right| = \lim_{s\to 0}\left|\frac{s^g D_L^{'}(s)}{s^g D_L^{'}(s)+K_g N_L^{'}(s)}\frac{\rho}{s^h}\right|$$

g rappresenta il numero di *zeri nell'origine* della funzione di sensibilità. Il numero g è detto tipo del sistema di controllo. Nello schema con compensazione in cascata e retroazione unitaria il tipo coincide anche con il numero di poli nell'origine della funzione di anello $L(s)$

Il limite è:

- finito per $g=h$
- nullo per $g>h$

Analisi della precisione in regime permanente: riferimenti polinomiali

- L'errore di inseguimento $|e^\infty_r|$ risulta finito se:
  - il tipo g del sistema di controllo risulta $\geq h$
- In particolare, l'errore di inseguimento $|e^\infty_r|$ risulta nullo se:
  - il tipo g del sistema di controllo risulta $> h$
- L'errore di inseguimento $|e^\infty_r|$ risulta inferiore ad un dato valore $\bar{e}$ se:
  - il guadagno statico generalizzato K_g ha un valore $\geq$ di un opportuno valore ottenibile tramite la seguente tabella, ricavata mediante il calcolo esplicito del limite precedente

Analisi della precisione in regime permanente: riferimenti polinomiali

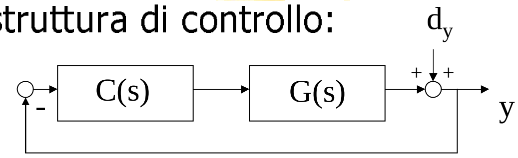
$$\left|e_r^\infty\right|$$

h / tipo g	0 (gradino) r(t)=ρε(t)	1 (rampa) r(t)=ρtε(t)	2 (parabola) r(t)=ρt²/2ε(t)
0	$\left\|\frac{\rho}{1+K_0}\right\|$	∞	∞
1	0	$\left\|\frac{\rho}{K_1}\right\|$	∞
2	0	0	$\left\|\frac{\rho}{K_2}\right\|$

$$K_g = \lim_{s\to 0} s^g L(s)$$

Analisi della precisione in regime permanente: disturbi polinomiali

- Data la struttura di controllo:



- Si definisce il *contributo stazionario del disturbo sull'uscita* la quantità:

$$\left|y_{d_y}^\infty\right| = \lim_{t\to\infty}\left|y(t)\right|$$

- consideriamo le sue proprietà quando il riferimento è polinomiale di ordine h ed ampiezza δ_y:

$$d_y(t) = \delta_y \frac{t^h}{h!} \qquad D_y(s) = \frac{\delta_y}{s^{h+1}}$$

Analisi della precisione in regime permanente: disturbi polinomiali

Si ha quindi:

$$\left|y_{d_y}^{\infty}\right| = \lim_{t\to\infty}\left|y(t)\right| = \lim_{s\to 0} s\left|Y(s)\right| = \lim_{s\to 0} s\left|S(s)D_y(s)\right|$$

Data la struttura del calcolo, valgono gli stessi risultati visti per $|e^{\infty}_{r}|$. Quindi il contributo stazionario sull'uscita per un disturbo polinomiale di ordine h risulta:

- limitato se $g=h$
- nullo per $g>h$ *(in questo caso il sistema si dice astatico al disturbo)*
- illimitato per $g<h$

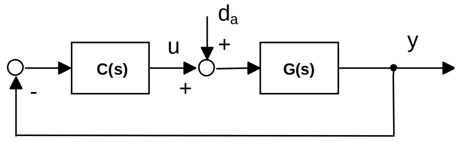
Analisi della precisione in regime permanente: disturbi polinomiali

$\left|y_{d_y}^{\infty}\right|$

tipo g \ h	0 (gradino) $d_y(t)=\delta_y\varepsilon(t)$	1 (rampa) $d_y(t)=\delta_y t\varepsilon(t)$	2 (parabola) $d_y(t)=\delta_y t^2/2\varepsilon(t)$
0	$\left\|\frac{\delta_y}{1+K_0}\right\|$	∞	∞
1	0	$\left\|\frac{\delta_y}{K_1}\right\|$	∞
2	0	0	$\left\|\frac{\delta_y}{K_2}\right\|$

$$K_g = \lim_{s\to 0} s^g L(s)$$

Analisi della precisione in regime permanente: disturbi polinomiali



Per quanto riguarda il disturbo di ingresso d_a si possono sviluppare calcoli analoghi che portano a concludere che il contributo sull'uscita in regime permanente dipende dal "tipo" g_c **della funzione di trasferimento di ciò che si trova a monte del disturbo** d_a

Analisi della precisione in regime permanente: disturbi polinomiali

In particolare per un disturbo polinomiale di ordine h si ha un contributo stazionario $\left|y_{d_a}^{\infty}\right|$ sull'uscita:

- limitato se $g_c = h$
- nullo per $g_c > h$ *(in questo caso il sistema si dice astatico al disturbo)*
- illimitato per $g_c < h$

Analisi della precisione in regime permanente: disturbi polinomiali

$$\left| y_{d_a}^{\infty} \right|$$

h / tipo g_c	0 (gradino) $d_a(t)=\delta_a\varepsilon(t)$	1 (rampa) $d_a(t)=\delta_a t\varepsilon(t)$	2 (parabola) $d_a(t)=\delta_a t^2/2\varepsilon(t)$
0	$\left\|\frac{\delta_a}{\Gamma_0}\right\|$	∞	∞
1	0	$\left\|\frac{\delta_a}{\Gamma_1}\right\|$	∞
2	0	0	$\left\|\frac{\delta_a}{\Gamma_2}\right\|$

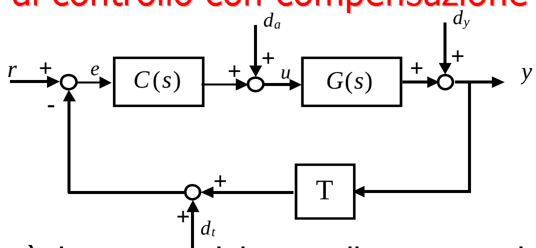
$$\Gamma_0 = \begin{cases} \lim\limits_{s\to 0} C(s) & \text{se } G(s) \text{ ha poli in } 0 \\ \dfrac{1+C(0)G(0)}{G(0)} & \text{se } G(s) \text{ non ha poli in } 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_{g_c} = \lim_{s\to 0} s^{g_c} C(s),\ g_c \geq 1$$

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale L7 - 13

Progetto di controllori in cascata

Struttura di controllo con compensazione in cascata



- L'obiettivo è il progetto del controllore C(s) utilizzando il comportamento in frequenza della funzione di anello L(s);
- L'analisi della precisione in regime permanente permette di tradurre i requisiti del sistema retroazionato in requisiti (nel dominio della frequenza) sulla funzione di anello;

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale L7 - 14

Progetto a regime

Struttura del controllore in cascata

Il controllore $C(s)$ è costituito dal prodotto di due termini

$$C(s) = C_R(s)\, C_T(s)$$

controllore a regime

controllore dinamico

- Il controllore $C_R(s)$ si progetta per primo in modo da garantire il soddisfacimento delle specifiche in regime permanente.
- Il controllore $C_T(s)$ si progetta dopo avere progettato $C_R(s)$ in modo tale da non influenzare le proprietà a regime di $L(s)$: a tal fine deve risultare $\lim_{s\to 0} C_T(s)=1$.

Progetto a regime

Struttura del controllore a regime

Per soddisfare le specifiche sulla precisione in regime permanente il controllore $C_R(s)$ deve:

- aggiungere i poli nell'origine necessari per ottenere il tipo desiderato
- dimensionare K_c in modo da ottenere i livelli di precisione desiderati

Pertanto il controllore $C_R(s)$ deve essere della forma:

$$C_R(s) = \frac{K_c}{s^r}$$

Progetto a regime

La scelta del segno di K_c si basa sul *Criterio di Bode*.

Si supponga che:

- ***$L(s)$ non abbia poli a parte reale positiva;***
- ***il diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$ attraversi una sola volta l'asse a 0 dB***

Allora, detti K_g il guadagno statico generalizzato di $L(s)$ e m_φ il corrispondente margine di fase, il sistema retroazionato è stabile se e solo se risulta $K_g > 0$ & $m_\varphi > 0$

Poiché si richiede $K_g = K_c * K_G > 0$, si sceglie di conseguenza il segno di K_c sulla base del guadagno statico (generalizzato) K_G di $G(s)$. La condizione $m_\varphi > 0$ sarà comunque garantita dal progetto dinamico.

Progetto a regime

- Se le ipotesi di applicazione del *Criterio di Bode* non sono soddisfatte (es. sistemi instabili ad anello aperto), la scelta del segno di K_c viene condotta considerando il diagramma di Nyquist della funzione di anello ottenuta dopo il passo di compensazione a regime.
- In particolare si studiano le condizioni di segno cui deve soddisfare K_c affinché un sistema retroazionato inizialmente instabile possa stabilizzarsi modificando, al finito, il comportamento dinamico della funzione di anello. (*Principio della compensazione dinamica*)