

Controlli Automatici (AUT) - 09AKS_{BL}

Margini di stabilità
Descrizione dell'incertezza
Stabilità robusta

Margini di sicurezza sulla stabilità

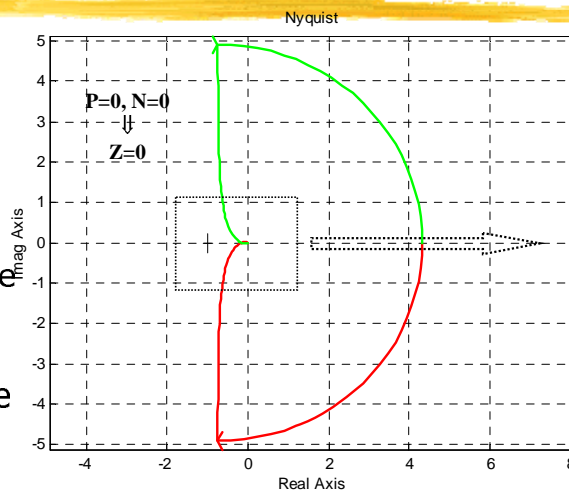
- Il criterio di Nyquist permette di valutare le caratteristiche di stabilità di un sistema retroazionato in condizioni nominali (*cioè quando l'impianto è descritto esattamente dalla fdt $G(s)$*)
- In pratica, è inevitabile che vi sia discrepanza tra il comportamento dell'impianto e quello nominale previsto da $G(s)$. Un'incertezza su $G(s)$ si ripercuote anche sulla funzione di anello $L(s)$.
- Uno degli obiettivi principali di un sistema di controllo è quello di garantire la stabilità del sistema retroazionato anche a fronte di incertezza sulla funzione di anello $L(s)$.

Margini di sicurezza sulla stabilità

- Si parla di stabilità robusta quando *il sistema retroazionato*, oltre ad essere stabile in condizioni nominali, *risulta stabile anche in presenza di perturbazioni della funzione di anello*.
- Il criterio di Nyquist, data la sua natura grafica, permette di definire indicatori e condizioni di stabilità robusta.
- In particolare, è possibile introdurre condizioni di stabilità robusta definendo in modo opportuno la distanza del diagramma di Nyquist corrispondente al modello nominale dal punto critico $C_r = (-1, j0)$.

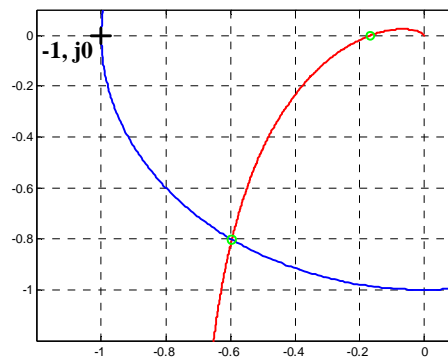
Margini di sicurezza sulla stabilità

- Consideriamo un sistema retroazionato stabile: $L(s) = 1/(s(I+s)(I+s/2))$
- vogliamo valutare in modo sistematico l'entità della perturbazione che lo rende ancora stabile



Margini di sicurezza sulla stabilità

- Consideriamo un ingrandimento della figura precedente su cui è stata tracciata (in blu) la circonferenza di raggio 1 e centrata in $(0,0)$



Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L6 - 5

Margini di sicurezza sulla stabilità

- Rispetto al punto $Cr=(-1,j0)$ $|Cr|=1$ $\angle Cr=-180^\circ$, calcoliamo quanto possiamo perturbare $L(j\omega)$ prima di provocare l'instabilità del sistema retroazionato. Questo corrisponde a:
 - valutare quanto possiamo perturbare il modulo di $L(j\omega)$ quando ha la medesima fase di Cr
 - valutare quanto possiamo perturbare la fase di $L(j\omega)$ quando ha il medesimo modulo di Cr

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

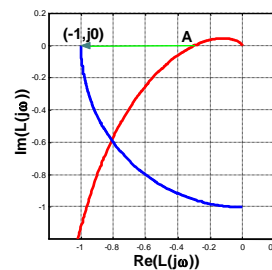
L6 - 6

Margine di guadagno

Margine di guadagno m_G

- Definisce la massima perturbazione tollerabile sul modulo della funzione di anello (a parità di fase) prima che il sistema retroazionato diventi instabile

- Tale perturbazione è tale da portare il punto A nel punto $(-1, j0)$



Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L6 - 7

Margine di guadagno

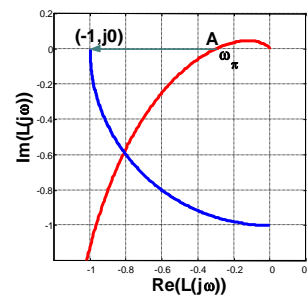
- Il punto A è il punto relativo alla frequenza ω_π tale che $\angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ$; ω_π è detta *pulsazione di opposizione*

- La massima perturbazione sul modulo si calcola come:

$$m_G |L(j\omega_\pi)| = 1$$

$$\Downarrow$$

$$m_G = 1 / |L(j\omega_\pi)|$$



Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L6 - 8

Margine di guadagno

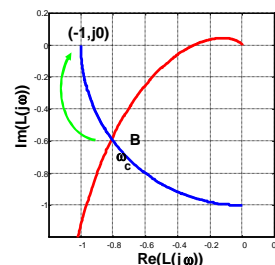
- Se il valore di m_G è maggiore di 1 allora il sistema retroazionato risulta stabile.
- Se il valore di m_G è minore di 1 allora il sistema retroazionato risulta instabile.

Margine di fase

Margine di fase m_φ

- Definisce la massima perturbazione tollerabile sulla fase della funzione di anello (a parità di modulo) prima che il sistema retroazionato diventi instabile

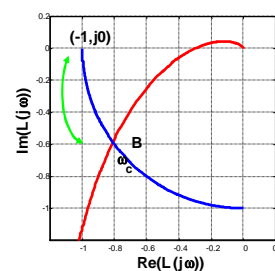
- Tale perturbazione è tale da portare il punto B nel punto $(-1, j0)$ lungo la circonferenza unitaria



Margine di fase

- Il punto B è il punto relativo alla frequenza ω_c tale che $|L(j\omega_c)| = 1$; ω_c è la *pulsazione di attraversamento o di cross-over*
- La massima perturbazione sulla fase si calcola come:

$$m_\varphi = 180^\circ - |\angle L(j\omega_c)|$$

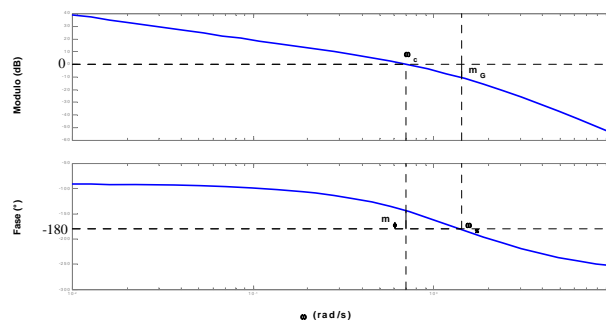


Margine di fase

- Se il valore di m_φ è maggiore di 0 allora il sistema retroazionato risulta stabile.
- Se il valore di m_φ è minore di 0 allora il sistema retroazionato risulta instabile.

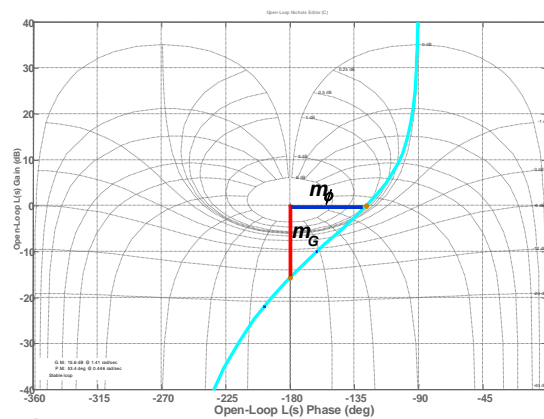
Margini di guadagno e di fase

Margine di guadagno e di fase sui diagrammi di Bode (istruzione "margin")



Margini di guadagno e di fase

Margine di guadagno e di fase sui diagrammi di Nichols



Generalizzazione dei margini di guadagno e di fase

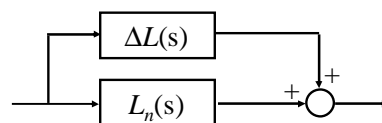
Generalizzazione dei margini di stabilità

- Le condizioni fornite dai margini di fase e di guadagno sono di natura "puntuale" nel senso che riguardano il comportamento di $L(s)$ soltanto in 2 punti della sua risposta in frequenza (ω_π e ω_c)
- Il soddisfacimento di requisiti sui margini di fase e di guadagno non garantisce in generale che il diagramma di Nyquist di $L(s)$ si mantenga tra le frequenze ω_π e ω_c "sufficientemente lontano" dal punto $(-1, j0)$

Margini di sicurezza sulla stabilità

- Questo problema è particolarmente importante quando la funzione di anello è affetta da incertezza:

$$L(s) = L_n(s) + \Delta L(s)$$

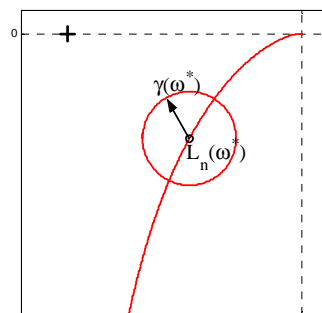


- In generale, $\Delta L(s)$ non è una funzione nota ma si dispone, a partire da procedimenti di identificazione, dell'informazione:

$$\Delta L(s) : |\Delta L(j\omega)| \leq \gamma(\omega) \leq \bar{\gamma}$$

Margini di sicurezza sulla stabilità

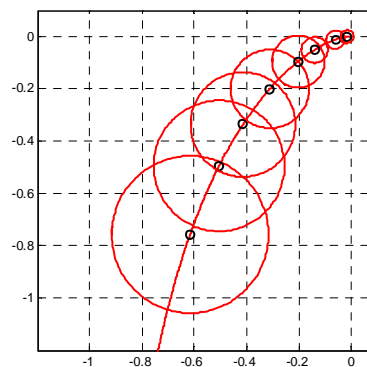
- Non disponendo dell'informazione sulla fase di $\Delta L(s)$ il punto del diagramma di Nyquist di $L(j\omega^*)$ che corrisponde alla frequenza ω^* si trasforma in una circonferenza centrata in $L_n(j\omega^*)$ e di raggio $\chi(j\omega^*)$:



- Il punto corrispondente a $L(j\omega^*)$ può giacere in uno qualsiasi dei punti interni alla circonferenza di centro $L_n(j\omega^*)$ e raggio $\chi(j\omega^*)$

Margini di sicurezza sulla stabilità

- Il diagramma di Nyquist di $L(j\omega^*)$ si trasforma in un "involuppo di andamenti":



Margini di sicurezza sulla stabilità

- Affinché il sistema sia stabile robustamente deve risultare:

$$|1+L_n(j\omega^*)| > \gamma(\omega^*), \forall \omega^*$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{|1+L_n(j\omega^*)|} = |S_n(j\omega^*)| < \frac{1}{\gamma(\omega^*)}, \forall \omega^*$$

$$\Rightarrow S_p < \frac{1}{\bar{\gamma}}$$

Margini di sicurezza sulla stabilità

- Il picco di risonanza della funzione $S(s)$ è quindi una misura della stabilità robusta del sistema.**
- Tanto più è limitato il picco S_p tanto più è alto il livello di incertezza tollerato dal sistema di controllo.

$$S_p < \frac{1}{\bar{\gamma}}$$

Descrizione dell'incertezza

Incertezza sulla funzione di anello

$$L(s) = L_n(s) + \Delta L(s)$$

- In realtà la fonte di incertezza è localizzata nella fdt $G(s)$ in quanto il controllore, scelto ed implementato dal progettista, è assunto privo di incertezze
- Esistono due forme di rappresentazione dell'incertezza sulla funzione $G(s)$:
 - Modello di incertezza additivo
 - Modello di incertezza moltiplicativo

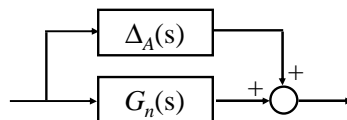
Descrizione dell'incertezza

Incertezza additiva:

$$G(s) = G_n(s) + \Delta_A(s), \quad |\Delta_A(j\omega)| \leq \gamma_A(\omega) \leq \bar{\gamma}_A$$

↓

$$L_n(s) = C(s)G_n(s), \quad \Delta L(s) = C(s)\Delta_A(s)$$



Descrizione dell'incertezza

Incertezza additiva (condizione di stabilità robusta):

$$|1 + L_n(j\omega^*)| > \gamma(\omega^*), \forall \omega$$

$$|1 + L_n(j\omega^*)| > |C(j\omega^*)| \gamma_A(\omega^*)$$

$$\frac{1}{|1 + L_n(j\omega^*)|} = |S_n(j\omega^*)| < \frac{1}{|C(j\omega^*)| \gamma_A(\omega^*)}, \forall \omega^*$$

Anche in questo caso rendendo "piccolo" il modulo della funzione $S(s)$ si ottengono margini di stabilità robusta più ampi

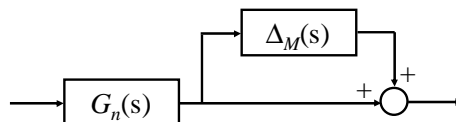
Descrizione dell'incertezza

Incertezza moltiplicativa:

$$G(s) = (1 + \Delta_M(s))G_n(s), |\Delta_M(j\omega)| \leq \gamma_M(\omega) \leq \bar{\gamma}_M$$

↓

$$L_n(s) = C(s)G_n(s), \Delta L(s) = C(s)G_n(s)\Delta_M(s)$$



Descrizione dell'incertezza

Incertezza moltiplicativa (condizione di stabilità robusta):

$$\left. \begin{aligned}
 &|1 + L_n(j\omega^*)| > \gamma(\omega^*), \forall \omega \\
 &|1 + L_n(j\omega^*)| > |C(j\omega^*)G_n(j\omega^*)| \gamma_M(\omega^*) = |L_n(j\omega^*)| \gamma_M(\omega^*) \\
 &\left| \frac{L_n(j\omega^*)}{1 + L_n(j\omega^*)} \right| = |T_n(j\omega^*)| < \frac{1}{\gamma_M(\omega^*)}, \forall \omega^*
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_p < \frac{1}{\bar{\gamma}_M}$$

Descrizione dell'incertezza

- **Anche il picco di risonanza della funzione $T(s)$ è una misura della stabilità robusta del sistema.**
- Tanto più è limitato il picco T_p tanto più è alto il livello di incertezza (moltiplicativa) tollerato dal sistema di controllo.

Relazioni tra i margini sicurezza sulla stabilità

- Relazioni tra S_p , m_G e m_ϕ
- Condizioni necessarie affinché il sistema di controllo soddisfi un requisito del tipo $S_p \leq S_{MAX}$ (es. $S_p \leq 3$ dB) che risulti:

$$m_G \geq \frac{S_{MAX}}{S_{MAX} - 1}, \quad m_\phi \geq 2 \arcsin\left(\frac{1}{2S_{MAX}}\right), \quad S_{MAX} \text{ NON in dB !!!}$$

Relazioni tra i margini sicurezza sulla stabilità

- Relazioni tra T_p , m_G e m_ϕ
- Condizioni necessarie affinché il sistema di controllo soddisfi un requisito del tipo $T_p \leq T_{MAX}$ (es. $T_p \leq 1$ dB) che risulti:

$$m_G \geq 1 + \frac{1}{T_{MAX}}, \quad m_\phi \geq 2 \arcsin\left(\frac{1}{2T_{MAX}}\right), \quad T_{MAX} \text{ NON in dB !!!}$$

Relazioni tra i margini sicurezza sulla stabilità

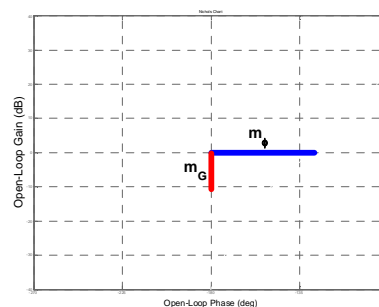
- Dalle condizioni necessarie si può trovare una condizione necessaria su m_G e m_ϕ in modo tale da tenere conto contemporaneamente di requisiti su $T_p \leq T^{MAX}$, e $S_p \leq S^{MAX}$:

$$m_G = \max \left\{ \frac{S_{MAX}}{S_{MAX} - 1}, 1 + \frac{1}{T_{MAX}} \right\}$$

$$m_\phi = \max \left\{ 2 \arcsin \left(\frac{1}{2S_{MAX}} \right), 2 \arcsin \left(\frac{1}{2T_{MAX}} \right) \right\}$$

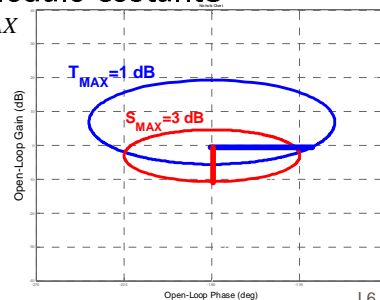
Relazioni tra i margini sicurezza sulla stabilità

- Sul piano di Nichols le due condizioni necessarie impongono che le intersezioni del diagramma di $L(s)$ avvengano rispettivamente più a destra del segmento individuato da m_ϕ e più in basso del segmento individuato da m_G



Relazioni tra i margini sicurezza sulla stabilità

- Considerare direttamente i requisiti su T_p e S_p impone una condizione più generale e restrittiva in quanto, oltre a rispettare i vincoli sulle intersezioni degli assi, il diagramma di Nichols di $L(s)$ deve risultare esterno (al più tangente) ai luoghi a modulo costante corrispondenti a T^{MAX} e S^{MAX}



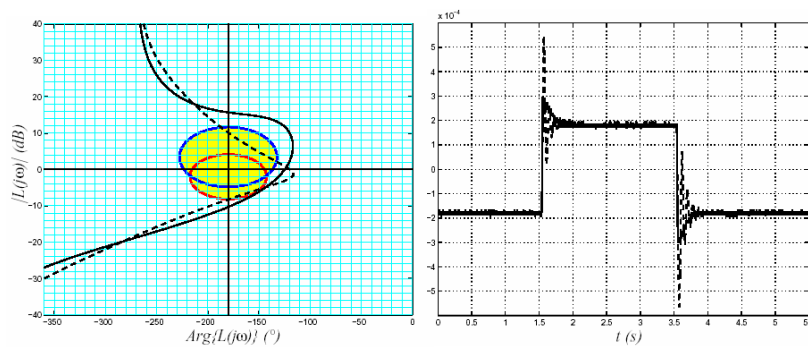
Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

Open-Loop Phase (deg)

L6 - 31

Relazioni tra i margini sicurezza sulla stabilità

- Esempio:



Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L6 - 32