

Controlli Automatici (AUT) - 09AKS_{BL}

Regime permanente armonico

- Risposta in frequenza
- Rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza

Risposta in frequenza (1)

- Sistema lineare stazionario TC:

$$H(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

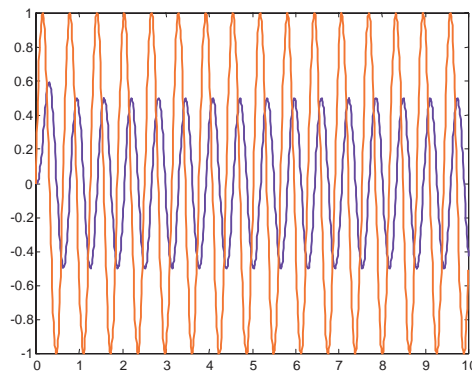
- **Ingresso sinusoidale:** $u(t) = A_u \sin(\omega t)$
- **Uscita a regime:** $y_{perm}(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi)$

$$A_y = A_y(j\omega) = A_u |H(j\omega)| \quad \varphi = \varphi(j\omega) = \angle H(j\omega)$$

Risposta in frequenza (2)

Regime permanente armonico

$$u(t) = A_u \sin(\omega t) \xrightarrow{u(t)} \boxed{H(s)} \xrightarrow{y(t)} y_{perm}(t) = A_y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$



$$A_y(\omega) = A_u |H(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$$

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 3

Risposta in frequenza (3)

La funzione di risposta armonica

- descrive le caratteristiche dell'uscita in regime permanente di un sistema lineare stabile quando l'ingresso è una sinusoide di pulsazione ω ;
- dipende dalla funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema;
- al variare della pulsazione ω è una funzione complessa di variabile reale;
- al variare di $\omega \in \mathfrak{R}^+$ l'andamento della funzione $H(j\omega)$ è detto risposta armonica del sistema;

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 4

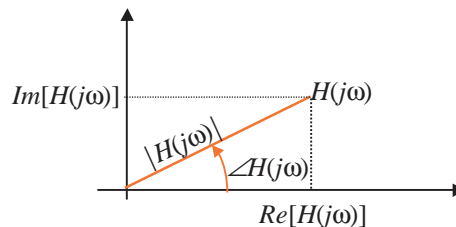
Risposta in frequenza (4)

Rappresentazione della risposta armonica

- al variare di $\omega \in \mathfrak{R}^+$ $H(j\omega)$ è un numero complesso;
- rappresentazione cartesiana

$$H(j\omega) = \text{Re}[H(j\omega)] + j\text{Im}[H(j\omega)]$$
- rappresentazione polare

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)}$$



Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

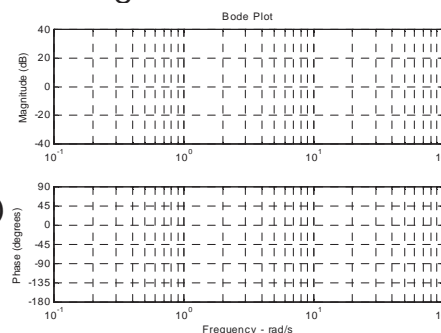
L2 - 5

Risposta in frequenza (5)

Rappresentazioni grafiche della risposta armonica

- Diagrammi di Bode:** rappresentazione polare della risposta armonica in funzione della frequenza mediante due diagrammi semilogaritmici.
- Asse delle frequenze logaritmico
- Asse del modulo lineare tarato in dB:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(|H(j\omega)|)$$
- Asse della fase lineare tarato in gradi ($^{\circ}$)



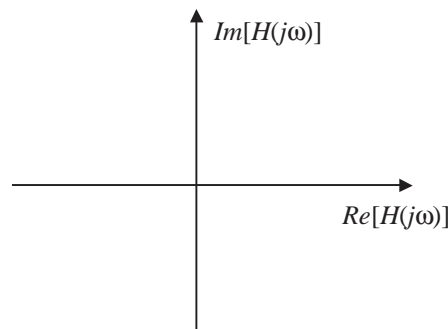
Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 6

Risposta in frequenza (6)

Rappresentazioni grafiche della risposta armonica

- **Diagrammi polari e di Nyquist:** rappresentazione cartesiana della risposta armonica mediante un unico diagramma parametrizzato in frequenza.
- Il diagramma polare è l'immagine di $H(j\omega)$ per $\omega \in \mathfrak{R}^+$;
- Il diagramma di Nyquist è l'immagine di $H(j\omega)$ per $\omega \in \mathfrak{R}$ e si ottiene da quello polare per simmetria rispetto all'asse Re.
- Ad ogni punto del diagramma corrisponde una frequenza ω .



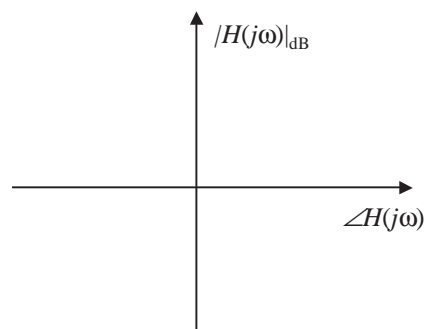
Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 7

Risposta in frequenza (7)

Rappresentazioni grafiche della risposta armonica

- **Diagrammi di Nichols:** rappresentazione polare della risposta armonica mediante un unico diagramma cartesiano parametrizzato in frequenza.
- Ad ogni punto del diagramma corrisponde una frequenza ω .



Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 8

Risposta in frequenza (8)

**Rappresentazioni grafiche della risposta armonica:
Matlab**

- Diagrammi di Bode: istruzione **bode**.
- Diagrammi di Nyquist: istruzione **nyquist**.
- Diagrammi di Nichols: istruzione **nichols**.

Risposta in frequenza (9)

Calcolo della risposta armonica:

- Funzione di trasferimento (forma fattorizzata di Bode):

$$G(s) = \frac{(1+2s)}{s(1+s+s^2)}$$

Risposta armonica:
$$G(j\omega) = \frac{(1+2j\omega)}{j\omega(1+j\omega-\omega^2)} = \frac{G_1(j\omega)}{G_2(j\omega)G_3(j\omega)}$$

Modulo: $|G(j\omega)|_{\log} = |G_1(j\omega)|_{\log} - |G_2(j\omega)|_{\log} - |G_3(j\omega)|_{\log}$

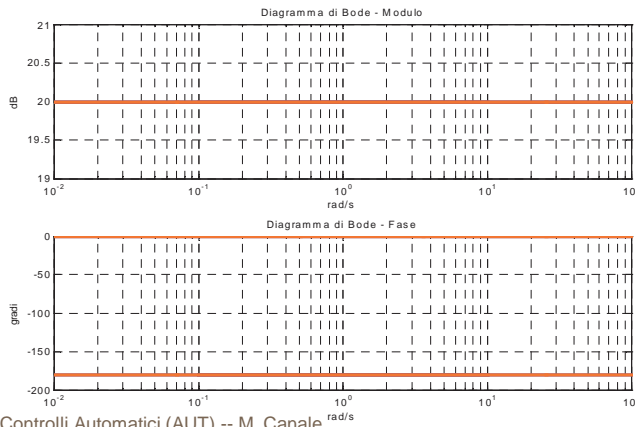
$$|G(j\omega)|_{\log} = 20 \log_{10}(|G(j\omega)|) \text{ dB}$$

Fase: $\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) - \angle G_2(j\omega) - \angle G_3(j\omega)$

Risposta in frequenza (10)

Diagrammi di Bode: termini elementari

- Termine costante: $G(j\omega) = K$



$$|G(j\omega)| = K_{dB}$$

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ, & K > 0 \\ -180^\circ, & K < 0 \end{cases}$$

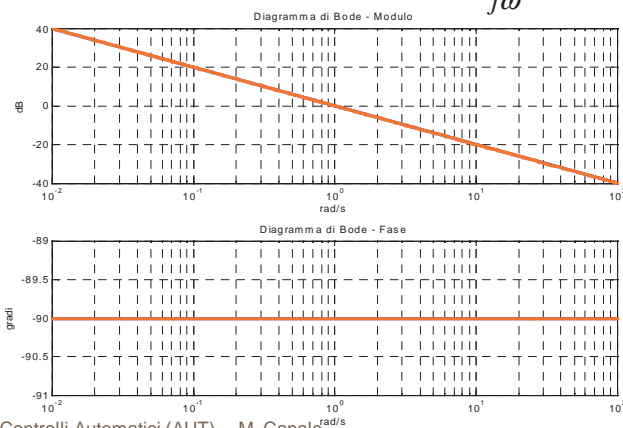
Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 11

Risposta in frequenza (11)

Diagrammi di Bode: termini elementari

- Polo nell'origine: $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\left| \frac{1}{j\omega} \right| \right) = -20 \log(\omega)$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \left(\frac{1}{j\omega} \right) = -90^\circ$$

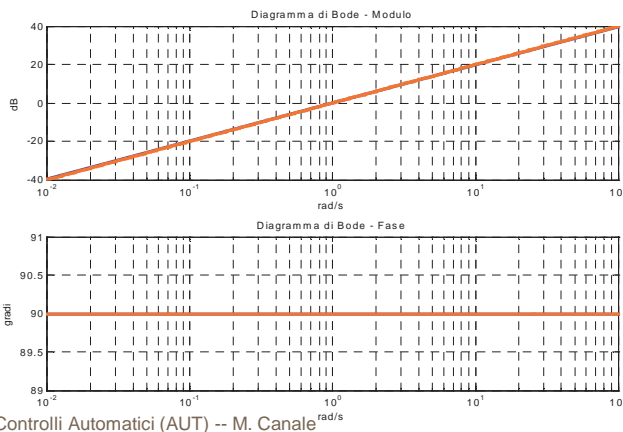
Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 12

Risposta in frequenza (12)

Diagrammi di Bode: termini elementari

- Zero nell'origine: $G(j\omega) = j\omega$



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log(|j\omega|) = 20\log(\omega)$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(j\omega) = 90^\circ$$

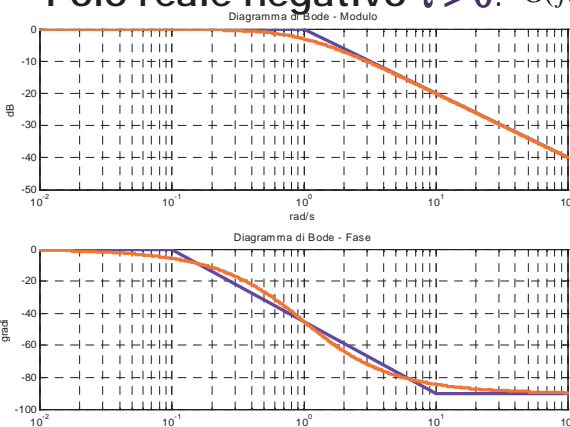
Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 13

Risposta in frequenza (13)

Diagrammi di Bode: termini elementari

- Polo reale negativo $\tau > 0$: $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{|1 + j\omega\tau|}\right) = -20\log(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2})$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1 + j\omega\tau) = -\arctg(\omega\tau)$$

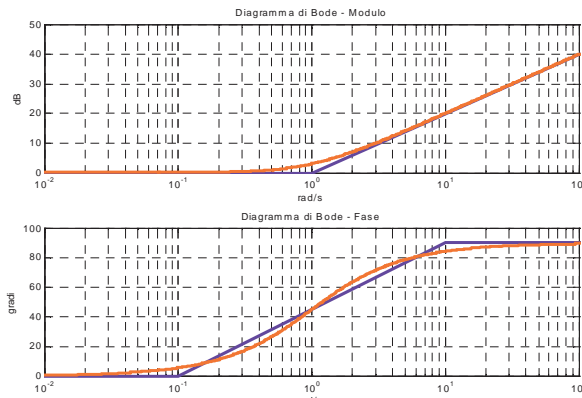
Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 14

Risposta in frequenza (14)

Diagrammi di Bode: termini elementari

- Zero reale negativo $\tau > 0$: $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log(1 + j\omega\tau) = 20\log(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2})$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega\tau) = \arctg(\omega\tau)$$

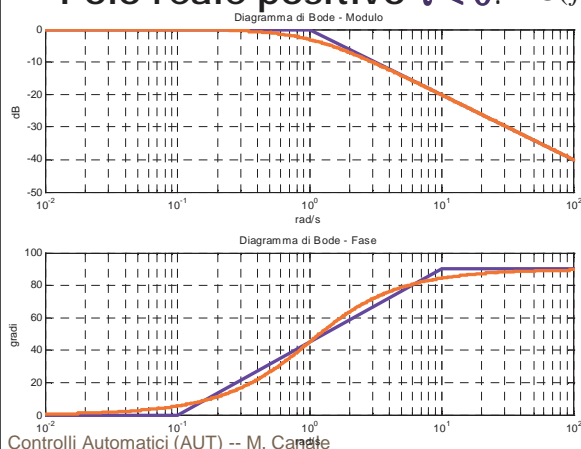
Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 15

Risposta in frequenza (15)

Diagrammi di Bode: termini elementari

- Polo reale positivo $\tau < 0$: $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{1 + j\omega\tau}\right) = -20\log(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2})$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1 + j\omega\tau) = -\arctg(\omega\tau)$$

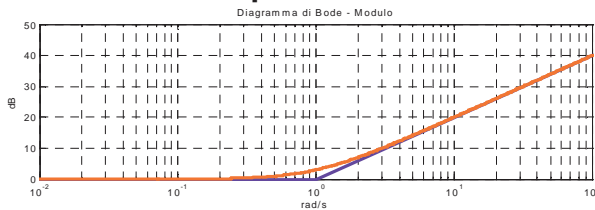
Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 16

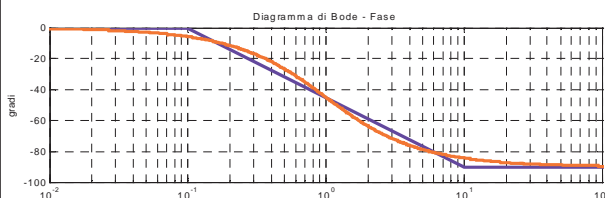
Risposta in frequenza (16)

Diagrammi di Bode: termini elementari

- Zero reale positivo $\tau < 0$: $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log(1 + j\omega\tau) = 20\log(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2})$$



$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega\tau) = \arctg(\omega\tau)$$

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 17

Risposta in frequenza (17)

Diagrammi di Bode: termini elementari

- Poli complessi coniugati negativi $\zeta > 0$ $G(s) = \frac{1}{1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$

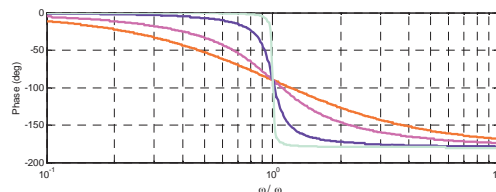
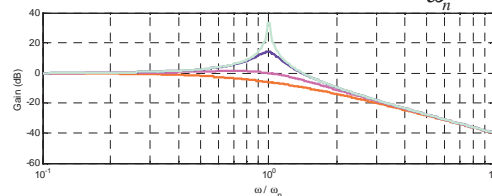
- Per $0 < \zeta < 0.7$ si ha un picco di risonanza

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

alla frequenza

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$\zeta = 0.01 \quad 0.1 \quad 0.5 \quad 1$$



Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

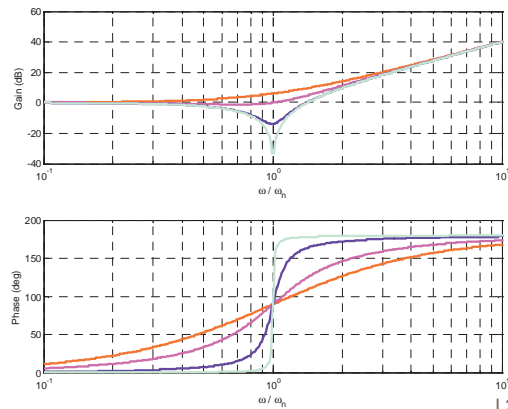
L2 - 18

Risposta in frequenza (18)

Diagrammi di Bode: termini elementari

- Zeri complessi coniugati negativi $\zeta > 0$ $G(s) = 1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

$\zeta = 0.01 \ 0.1 \ 0.5 \ 1$



Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

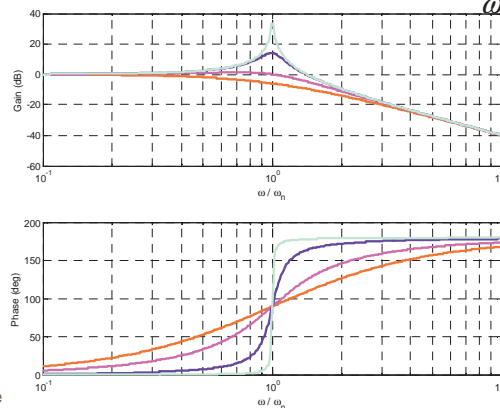
L2 - 19

Risposta in frequenza (19)

Diagrammi di Bode: termini elementari

- Poli complessi coniugati positivi $\zeta < 0$ $G(s) = \frac{1}{1 + 2\frac{\zeta}{\omega}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$

$\zeta = -0.01 \ -0.1 \ -0.5 \ -1$



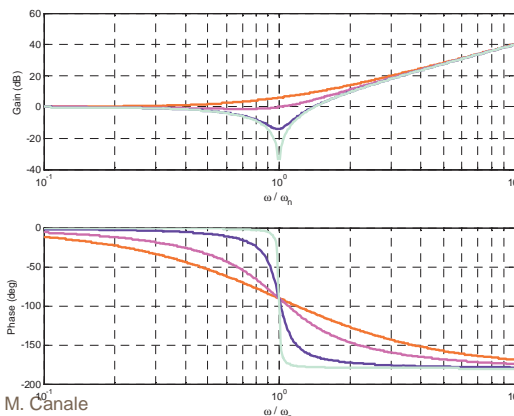
Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 20

Risposta in frequenza (20)

Diagrammi di Bode: termini elementari

- Zeri complessi coniugati positivi $\zeta < 0$ $G(s) = 1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$
- $\zeta = -0.01 \quad -0.1 \quad -0.5 \quad -1$

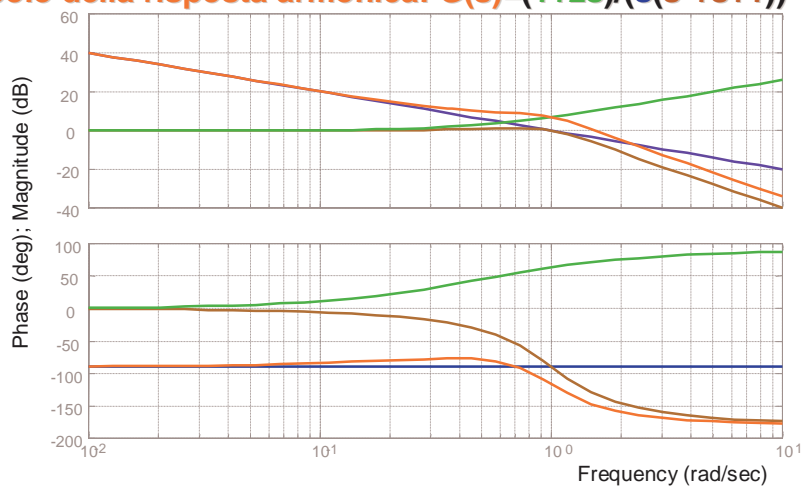


Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 21

Risposta in frequenza (21)

Calcolo della risposta armonica: $G(s) = (1+2s)/(s(s^2+s+1))$



Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 22

Risposta in frequenza (22)

Diagrammi di Bode: proprietà generali

- ogni polo a parte reale negativa o positiva o nulla introduce un decremento della pendenza pari a -20 dB/dec
- ogni zero a parte reale negativa o positiva o nulla introduce un aumento della pendenza pari a $+20$ dB/dec
- ogni polo a parte reale negativa o nulla sfasa complessivamente di -90°
- ogni polo a parte reale positiva sfasa complessivamente di $+90^\circ$
- ogni zero a parte reale negativa o nulla sfasa complessivamente di $+90^\circ$
- ogni zero a parte reale positiva sfasa complessivamente di -90°

Risposta in frequenza (23)

Diagrammi di Bode: proprietà generali

- i diagrammi degli zeri sono simmetrici (rispetto all'asse delle frequenze) di quelli dei poli della stessa natura
- per poli (zeri) a parte reale positiva
 - i diagrammi dei moduli non cambiano,
 - i diagrammi delle fasi sono simmetrici (rispetto all'asse reale) a quelli per poli/ zeri a parte reale negativa
- il comportamento delle singolarità multiple si ottiene da quelle semplici moltiplicando per la molteplicità

Risposta in frequenza (24)

Diagrammi di Bode: proprietà generali

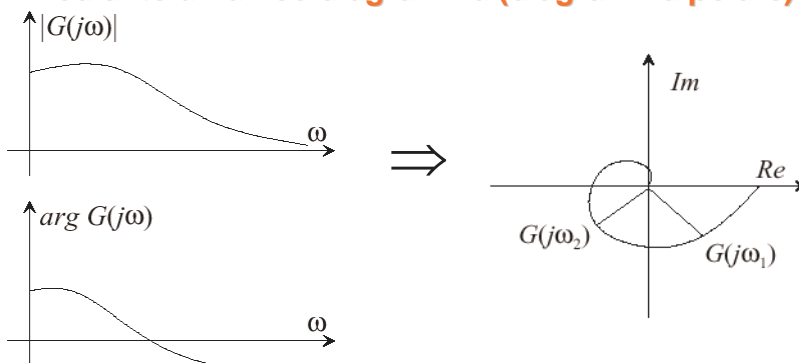
- i diagrammi di sistemi complessi si costruiscono a partire da quelli dei sistemi elementari componenti
- dalla conoscenza del diagramma del modulo non è possibile, in generale, risalire a quello della fase, perché la parte reale delle singolarità modifica solo la fase

Sistemi a fase minima o a minima rotazione di fase

- il guadagno è positivo
- tutte le singolarità (poli e zeri) sono a parte reale negativa o nulla

Risposta in frequenza (25)

Diagrammi di Nyquist: rappresentazione polare della risposta armonica mediante un unico diagramma (diagramma polare)



Risposta in frequenza (26)

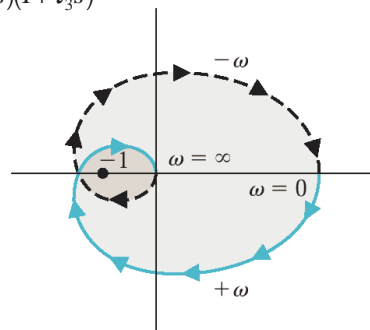
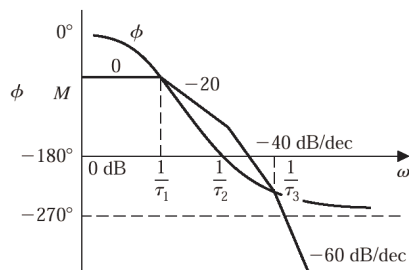
Diagrammi di Nyquist: costruzione del diagramma polare

- Valutare sulla base del diagramma di Bode il comportamento di modulo e fase per $\omega \rightarrow 0$ e tracciare il corrispondente punto sul piano polare $\Re(G(j\omega)), \Im(G(j\omega))$
- Valutare sulla base del diagramma di Bode il comportamento di modulo e fase per $\omega \rightarrow \infty$ e tracciare il corrispondente punto sul piano polare $\Re(G(j\omega)) \Im(G(j\omega))$
- Valutare sulla base del diagramma di Bode il comportamento della fase tra $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$ notando le intersezioni con gli assi coordinati e tracciando il corrispondente punto sul piano polare $\Re(G(j\omega)) \Im(G(j\omega))$
- Il diagramma di Nyquist si ottiene per simmetria rispetto all'asse reale.

Risposta in frequenza (27)

Diagrammi di Nyquist: esempi

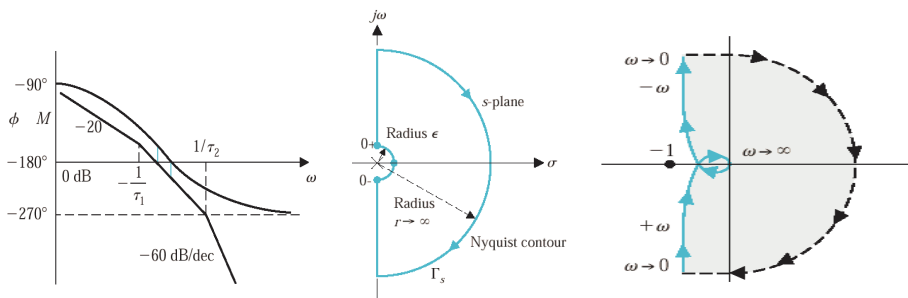
$$G(s) = \frac{1}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}$$



Risposta in frequenza (28)

Diagrammi di Nyquist: esempi

$$G(s) = \frac{1}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$



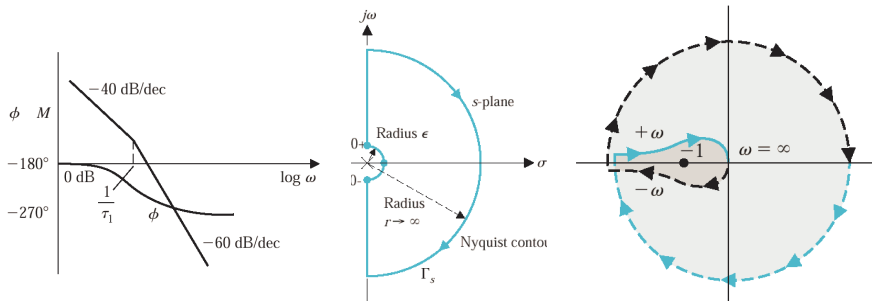
Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 29

Risposta in frequenza (29)

Diagrammi di Nyquist: esempi

$$G(s) = \frac{1}{s^2(1 + \tau_1 s)}$$



Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale

L2 - 30