Controlli Automatici (AUT) - 09AKSBL

Sistemi dinamici

- Introduzione
- Descrizione
- Soluzione
- Funzione di trasferimento
- Stabilità
- Regime permanente

Sistemi dinamici - Introduzione

- Concetto di sistema. Si parla di sistema quando si vuole indicare la connessione più o meno complessa di parti elementari.

$$u(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(t)$$

- $u(t)$ ingresso (causa), in generale $\mathbf{u(t)} \in \Re^m$;
- $y(t)$ uscita (effetto), in generale $\mathbf{y(t)} \in \Re^p$
- $\mathbf{t}$ indica la variabile tempo:
  - $\mathbf{t} \in \Re^+$ ***sistema a tempo continuo***
  - $\mathbf{t} \in \mathbf{Z}^+$ ***sistema a tempo discreto*** (per distinguere $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{k}$)

Sistemi dinamici - Introduzione

- Un sistema dinamico $\boldsymbol{S}$ può quindi essere rappresentato come segue:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{S}} \longrightarrow y(t)$$

- Problematiche da affrontare nello studio dei sistemi
  - *Descrizione:* date informazioni sulle componenti di S → determinare la struttura e le proprietà di S
  - *Soluzione:* dati S e $u(\bullet)$ → trovare $y(\bullet)$
  - *Controllo:* dati S e $y(\bullet)$ → trovare $u(\bullet)$
  - *Identificazione:* dati $u(\bullet)$ e $y(\bullet)$ → trovare S

Sistemi dinamici - Descrizione

- *Sistemi statici*. Il legame tra le grandezze $u(t)$, $y(t)$ è di tipo statico:

$$y(t) = f(u(t))$$

cioè la variabile $y(t)$ dipende dal valore di $u(t)$ al solo istante t.

- *Sistemi dinamici*. Il legame tra le grandezze $u(t)$ e $y(t)$ è di tipo dinamico ed è soluzione di un'equazione differenziale:

$$y^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t), \ldots, y(t), u^{(q)}(t), \ldots, u(t))$$

cioè la variabile $y(t)$ dipende dalla "storia passata" del sistema $\quad y(t) = f(u([0,t]), y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0))$

Sistemi dinamici - Descrizione

- *Sistemi lineari:* Vale il *principio di sovrapposizione degli effetti:*

$u_1(t) \rightarrow y_1(t),\ u_2(t) \rightarrow y_2(t) \ \Rightarrow c_1u_1(t) + c_2u_2(t) \rightarrow c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$

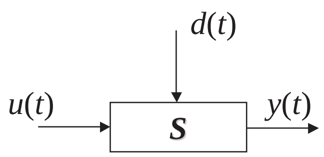
per qualsiasi coppia di numeri reali c_1 e c_2. (La funzione f è lineare)

- *Sistemi stazionari:* Vale la *proprietà di invarianza per traslazioni temporali:*

$$u(t) \rightarrow y(t) \quad \Rightarrow \quad u(t-\Delta t) \rightarrow y(t-\Delta t)$$

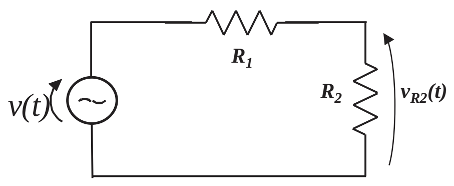
Sistemi dinamici - Descrizione

- Ingressi e disturbi
  - Ingresso o comando $u(t)$: è manipolabile e si utilizza per imporre un certo comportamento desiderato alla variabile di uscita del sistema
  - Disturbi $d(t)$: sono ulteriori ingressi che non sono manipolabili e provocano effetti indesiderati sulla variabile di uscita del sistema



Sistemi dinamici - Descrizione

Esempio 1. Rete elettrica passiva

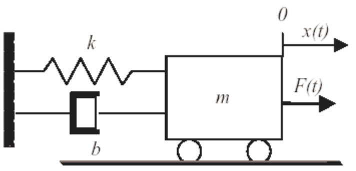


- $v(t) = u(t)$ ingresso (Tensione applicata)
- $v_{R2}(t) = y(t)$ uscita (Tensione su R_2)

$$v_{R2}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v(t)$$

Sistemi dinamici - Descrizione

Esempio 2. Sistema massa-molla-smorzatore

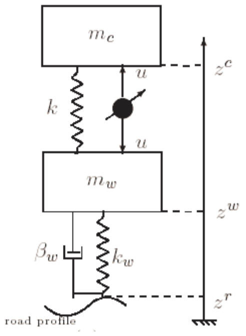


- $F(t) = u(t)$ ingresso (Forza applicata)
- $x(t) = y(t)$ uscita (Posizione della massa)

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - b\dot{x}(t) + F(t)$$

Sistemi dinamici - Descrizione

Esempio 3. Sospensione attiva (modello "quarter car")



- $F(t) = u(t)$ ingresso (Forza erogata dalla sospensione)
- $\ddot{z}^c(t) = y(t)$ uscita (Accelerazione della massa sospesa)
- $z_r(t) = d(t)$ disturbo (Andamento del profilo stradale)

$$m_c\ddot{z}^c = -k\left(z^c - z^w\right) + u$$

$$m_w\ddot{z}^w = k\left(z^c - z^w\right) - u - k_w\left(z^w - z^r\right) - \beta_w\left(\dot{z}^w - \dot{z}^r\right)$$

Sistemi dinamici lineari – Soluzione in dom(t)

- La dinamica di un sistema dinamico a tempo continuo viene descritta per mezzo di equazioni differenziali del tipo:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_q u^{(q)}(t) + \ldots + b_0 u(t)$$

- n è detto ordine dell'equazione differenziale ($n \geq q$);
- la soluzione si trova con la teoria delle equazioni differenziali ed è costituita dalla somma di due contributi:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

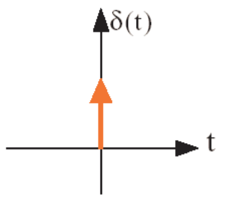
  - $y_l(t)$ risposta libera: dipende dalle condizioni iniziali $y^{(n-1)}(0),\ldots,y(0)$;
  - $y_f(t)$ risposta forzata: dipende dall'ingresso applicato nell'intervallo $0, t$: $u([0,t])$

Sistemi dinamici lineari – Ingressi canonici

Ingresso impulsivo (funzione *delta di Dirac)* $\delta(t)$

si tratta di un segnale con le seguenti caratteristiche:

- ampiezza infinita
- area sottesa unitaria

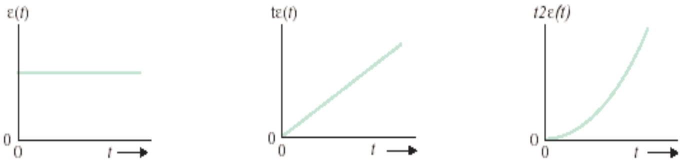


Sistemi dinamici lineari – Ingressi canonici

Ingressi polinomiali: si tratta di segnali rappresentati con funzioni polinomiali nella variabile temporale:

- Gradino: $\varepsilon(t)$ (ingresso costante)
- Rampa: $t\varepsilon(t)$
- Parabola: $t^2\varepsilon(t)$
- ...

I segnali sono “unilateralizzati” nel senso che hanno valore nullo per tempi negativi.



Sistemi dinamici lineari – Ingressi canonici

Ingressi armonici: segnali periodici

- $\varepsilon(t)\ sin(\omega t)$
- $\varepsilon(t)\ cos(\omega t)$

Sistemi dinamici lineari – Soluzione

Per risolvere l'equazione differenziale:

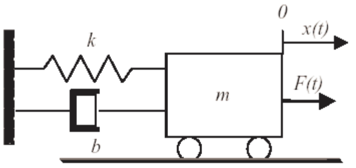
$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_q u^{(q)}(t) + \ldots + b_0 u(t)$$

bisogna fare ricorso alla teoria delle equazioni differenziali coinvolgendo principi di calcolo differenziale ed integrale

- per semplificare i conti della soluzione si ricorre alla *Trasformata di Laplace*

Sistemi dinamici lineari – Calcolo della soluzione nel dominio della frequenza (1)

- Esempio: sistema massa molla smorzatore



- $F(t) = u(t)$ ingresso (Forza applicata)
- $x(t) = y(t)$ uscita (Posizione della massa)

Dati

- $F(t) = \varepsilon(t)$ ingresso a gradino di ampiezza unitaria
- $x(0) = 1$
- $dx/dt(0) = 0$
- $m=1;\ k=2;\ b=3$

Calcolare l'espressione di Y(s)

Sistemi dinamici lineari – Calcolo della soluzione nel dominio della frequenza (2)

- Esempio: sistema massa molla smorzatore

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - b\dot{x}(t) + F(t) \rightarrow m\ddot{y}(t) = -ky(t) - b\dot{y}(t) + u(t)$$

$$\begin{array}{ccccc}
m\ddot{y}(t) & = & -ky(t) & -b\dot{y}(t) & +u(t) \\
\downarrow \mathrm{L} & & \downarrow \mathrm{L} & \downarrow \mathrm{L} & \downarrow \mathrm{L} \\
m(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) & = & -kY(s) & -b(sY(s) - y(0)) & +U(s)
\end{array}$$

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (ms + b)y(0) + m\dot{y}(0) + U(s)$$

$$Y(s) = \frac{ms+b}{ms^2+bs+k}y(0) + \frac{m}{ms^2+bs+k}\dot{y}(0) + \frac{1}{ms^2+bs+k}U(s)$$

Sistemi dinamici lineari – Calcolo della soluzione nel dominio della frequenza (3)

- Esempio: sistema massa molla smorzatore

$$Y(s) = \frac{ms+b}{ms^2+bs+k}\,y(0) + \frac{m}{ms^2+bs+k}\,\dot{y}(0) + \frac{1}{ms^2+bs+k}\,U(s)$$

$$Y(s) = H_0(s)y(0) + H_1(s)\dot{y}(0) + H(s)U(s)$$

- Sostituendo i valori numerici dei dati

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}\cdot 1 + \frac{1}{s^2+3s+2}\cdot 0 + \frac{1}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s}$$

Sistemi dinamici lineari – Calcolo della soluzione nel dominio della frequenza (4)

Generalizzazione:

- L’espressione dell’uscita di un sistema lineare nel dominio della trasformata di Laplace è sempre del tipo:

$$Y(s) = H_0(s)y(0) + H_1(s)\dot{y}(0) + \ldots + H_{n-1}(s)y^{(n-1)}(0) + H(s)U(s)$$

- Le funzioni $H_0(s), \ldots, H_{n-1}(s), H(s)$ sono funzioni razionali fratte (rapporto di polinomi) nella variabile complessa s
- Le funzioni $H_0(s), \ldots, H_{n-1}(s)$, rappresentano il legame tra l’uscita e le condizioni iniziali.
- La funzione $H(s)$ rappresenta il legame tra l’ingresso e l’uscita (per condizioni iniziali nulle) ed è detta *funzione di trasferimento* del sistema.
- La funzione di trasferimento costituisce la cosiddetta rappresentazione ingresso – uscita del sistema

Sistemi dinamici lineari - La funzione di trasferimento (1)

- In generale, per un sistema a r ingressi e p uscite, la funzione $H(s)$ è detta *matrice di trasferimento* ed è costituita da una matrice a p righe e r colonne di funzioni razionali della variabile s.
- La funzione di trasferimento è una funzione razionale della variabile s.

$$H(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad q \le n$$

- Se $q < n$ si dice che la funzione è *strettamente propria.*
- Se $q = n$ si dice che la funzione non è *strettamente propria (bipropria).*
- Le radici $\mathbb{C}$ del numeratore di $H(s)$ vengono dette *zeri* del sistema.
- Le radici $\mathbb{C}$ del denominatore di $H(s)$ vengono dette *poli* del sistema.

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale L1 - 19

Sistemi dinamici lineari - La funzione di trasferimento (2)

La funzione di trasferimento $H(s)$ può essere rappresentata in forme diverse.

- Forma polinomiale:

$$H(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad q \le n$$

- Forma “zeri e poli”:

$$H(s) = K_\infty \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_q)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

K_∞ è detto “guadagno infinito” e si può calcolare come:

$$K_\infty = \lim_{s\to\infty} s^{n-q} H(s)$$

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale L1 - 20

Sistemi dinamici lineari - La funzione di trasferimento (3)

- Forma "fattorizzata" (di Bode)

$$H(s)=K\frac{\left(1-\frac{s}{z_1}\right)\cdots\left(1-\frac{s}{z_q}\right)}{s^g\left(1-\frac{s}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{s}{p_{n-g}}\right)}=K\frac{(1+\rho_1 s)\cdots(1+\rho_2 s)}{s^g(1+\tau_1 s)\cdots(1+\tau_{n-g}s)}$$

K è detto "guadagno statico generalizzato" e si può calcolare come:

$$K=\lim_{s\to 0} s^g H(s)$$

$\tau_i = -1/p_i$ → "costante di tempo"

$\rho_i = -1/z_i$

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale L1 - 21

Sistemi dinamici lineari - La funzione di trasferimento (4)

- Esempio: sistema massa molla smorzatore

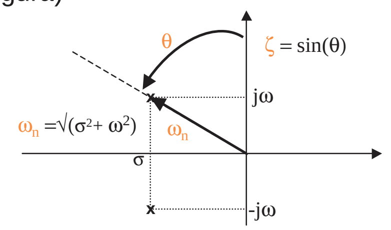
La funzione di trasferimento è:

$$H(s)=\frac{1}{ms^2+bs+k}\underset{m=1,b=3,k=2}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{1}{s^2+3s+2}=\begin{cases}\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\[2mm]\dfrac{0.5}{(1+s)(1+0.5s)}\end{cases}$$

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale L1 - 22

Sistemi dinamici lineari - La funzione di trasferimento (5) polinomio di secondo grado con radici $\mathbb{C}$

Si consideri un polinomio $p(s) = s^2 + a_1 s + a_0$ di secondo grado avente radici complesse coniugate $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$. σ e ω (parte reale e immaginaria) costituiscono la rappresentazione cartesiana delle radici complesse coniugate (vedi figura)



Considerando i parametri ζ e ω_n detti *smorzamento* e *pulsazione naturale* rispettivamente si ottiene una rappresentazione "polare" delle radici complesse coniugate. In funzione di ζ e ω_n, il polinomio $p(s)$ si può scrivere come: $s^2 + 2\,\zeta\omega_n s + \omega^2_n$

Sistemi dinamici lineari - La funzione di trasferimento (6)

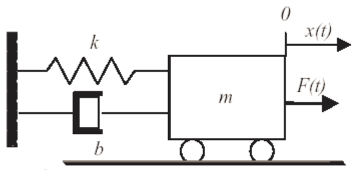
- Esempio: sistema massa molla smorzatore

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \underset{m=1,b=1,k=1}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{(s - 0.5 - 0.866\,j)(s - 0.5 + 0.866\,j)}$$

$$2\,\zeta\omega_n = 1$$
$$\omega^2_n = 1$$
$$\downarrow$$
$$\omega_n = 1\,,\ \zeta = 0.5$$

Sistemi dinamici lineari – Calcolo della soluzione nel dominio del tempo (1)

- Esempio: sistema massa molla smorzatore



- $F(t) = u(t)$ ingresso (Forza applicata)
- $x(t) = y(t)$ uscita (Posizione della massa)

Dati

- $F(t) = \varepsilon(t)$ ingresso a gradino di ampiezza unitaria
- $x(0) = 1$
- $dx/dt(0) = 0$
- $m=1;\ k=2;\ b=3$

Calcolare l'espressione di y(t)

Sistemi dinamici lineari – Calcolo della soluzione nel dominio della tempo (2)

- Esempio: sistema massa molla smorzatore

$$Y(s) = \frac{ms+b}{ms^2+bs+k}\,y(0) + \frac{m}{ms^2+bs+k}\,\dot{y}(0) + \frac{1}{ms^2+bs+k}\,U(s)$$

- Sostituendo i valori numerici dei dati si ha:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}\cdot 1 + \frac{1}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s}$$
$$= \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{0.5}{s+2} + \frac{0.5}{s} = \frac{1}{s+1} - \frac{0.5}{s+2} + \frac{0.5}{s}$$

Sistemi dinamici lineari – Calcolo della soluzione nel dominio della tempo (3)

- Esempio: sistema massa molla smorzatore

Con l'uso della tabella si ottiene:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{(s)^{n+1}}$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{s+\lambda}$
$\frac{t^n e^{-\lambda t}}{n!}$	$\frac{1}{(s+\lambda)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{0.5}{s+2} + \frac{0.5}{s}$$

$$y(t) = (e^{-t} - 0.5e^{-2t} + 0.5)\varepsilon(t)$$

Stabilità esterna o BIBO (1)

- Un sistema si dice stabile esternamente (Bounded Input – Bounded Output) se
  - con condizioni iniziali nulle y(0)=0, ...
  - ogni ingresso limitato |u(•)|<∞

  genera
  - un'uscita limitata |y(•)|<∞
- **Altrimenti** si dice instabile esternamente

Stabilità esterna o BIBO (2)

- Un sistema lineare stazionario TC descritto dalla fdt

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}$$

- si dice stabile esternamente se
  - $\mathrm{Re}(p_i)<0,\ \forall i$
- si dice instabile esternamente se
  - $\exists i:\ \mathrm{Re}(p_i)\geq 0$

Regime permanente

- Il regime permanente è la proprietà per cui in un sistema lineare stabile, a fronte di certe classi di ingressi, l'uscita, trascorso un tempo sufficientemente grande, assume la medesima forma dell'ingresso (a meno di un fattore di scala).
- Esistono due casi di particolare interesse per le applicazioni pratiche:
  - gradino
  - segnali armonici (sinusoide, ...)

Risposta al gradino (1)

Ingresso a gradino $u(t) = A_u \cdot \varepsilon(t), \quad U(s) = \frac{A_u}{s}$

Sistema lineare stazionario:

$$H(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale L1 - 31

Risposta al gradino (2)

Uscita a regime

$$A_y = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot H(s) \cdot U(s) =$$

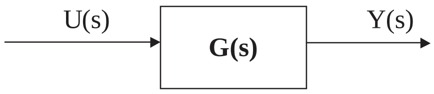
$$= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \cdot \frac{A_u}{s} = A_u \frac{b_0}{a_0}$$

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale L1 - 32

Connessione di Sistemi Dinamici (1)

Schemi a blocchi: rappresentazione grafica di un sistema

- i segnali sono rappresentati da frecce
- i sistemi da blocchi contenenti la fdt

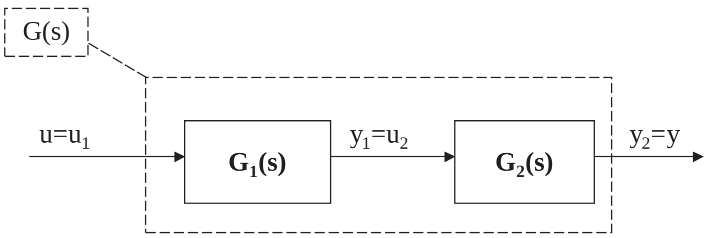


$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Connessione di Sistemi Dinamici (2)

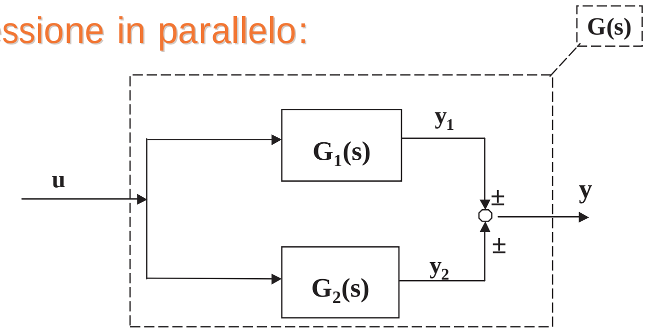
Connessione in serie o in cascata:



$$Y(s) = Y_2(s) = G_2(s)U_2(s) = G_2(s)Y_1(s) =$$
$$= G_2(s)G_1(s)U_1(s) = G_2(s)G_1(s)U(s) = G(s)U(s)$$
$$\Downarrow$$
$$G(s) = G_2(s)G_1(s)$$

Connessione di Sistemi Dinamici (3)

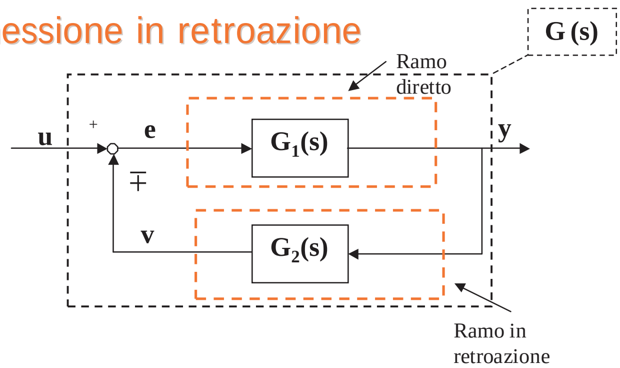
Connessione in parallelo:



$$Y(s) = \pm Y_1(s) \pm Y_2(s) = \pm G_1(s)U(s) \pm G_2(s)U(s) =$$
$$= \left[\pm G_1(s) \pm G_2(s)\right]U(s) = G(s)U(s)$$
$$\Downarrow$$
$$G(s) = \pm G_1(s) \pm G_2(s)$$

Connessione di Sistemi Dinamici (4)

Connessione in retroazione



$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)}$$

Connessione di Sistemi Dinamici (5)

Connessione in retroazione (dimostrazione)

$$Y(s) = G_1(s)\,E(s) =$$
$$= G_1(s)\left[U(s) \mp V(s)\right] =$$
$$= G_1(s)\left[U(s) \mp G_2(s)\,Y(s)\right] =$$
$$= G_1(s)\,U(s) \mp G_1(s)G_2(s)\,Y(s)$$
$$\Downarrow$$
$$Y(s) \pm G_1(s)G_2(s)\,Y(s) = G_1(s)\,U(s) \Rightarrow \left[1 \pm G_1(s)G_2(s)\right]Y(s) = G_1(s)\,U(s)$$
$$\Rightarrow\; Y(s) = \left[1 \pm G_1(s)G_2(s)\right]^{-1} G_1(s)U(s) = G(s)\,U(s)$$
$$\Rightarrow\; G(s) = \left[1 \pm G_1(s)G_2(s)\right]^{-1} G_1(s)$$

Controlli Automatici (AUT) -- M. Canale L1 - 37